[ALGO] Complexité des Algorithmes (4)

Par Rhaeven, relecture par Find3r

Méthode par substitution

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + cn \\ &= 2(2T(n/4) + c(n/2)) + cn \\ &= 4T(n/4) + cn + cn \\ &= 4(2T(n/8) + c(n/4)) + 2cn \\ &= 8T(n/8) + 3cn \end{aligned}$$

Apres $i - 1$ substitution :

$$T(n) = 2^i T(n/2^i) + icn$$

La récursion s'arrête quand $(n/2^i) = 1 \iff i = log_2 n$
Alors $T(n/2^{log_2 n}) = T(1) = \Theta(1)$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{log_2 n} T(n/2^{log_2 n}) + (log_2 n)cn \\ &= n\Theta(1) + cnlog_2 n \\ &= \Theta(nlogn) \end{aligned}$$

Théorème général

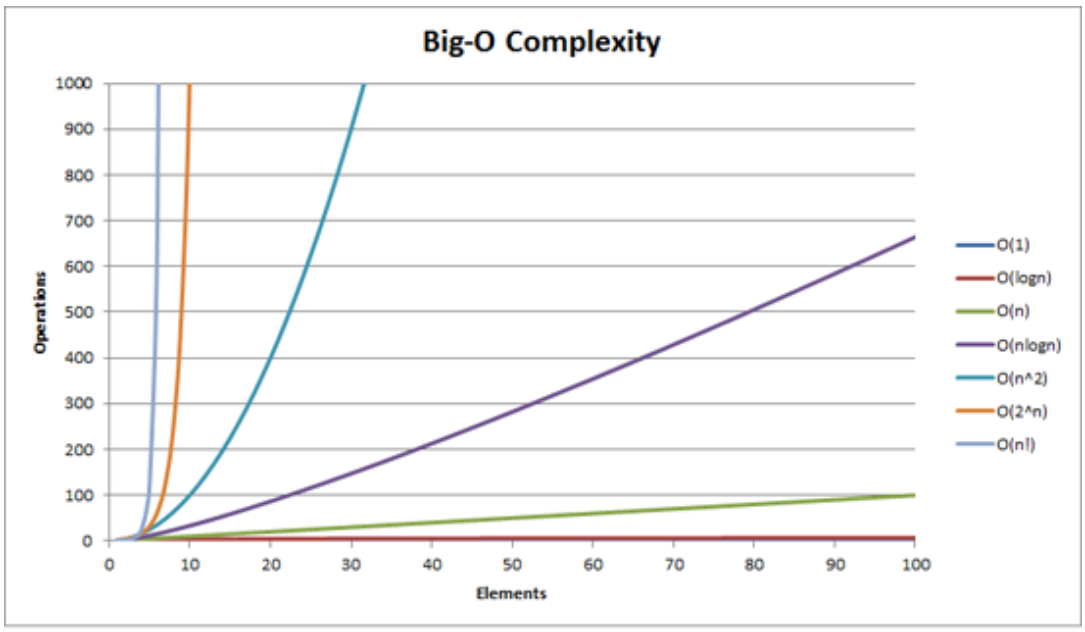
Théorème général pour résoudre les équations de complexité récursive de la forme

$$T(n) = aT(\frac{n}{b} + O(1)) + f(n)\ pour\ n \geq n_0$$

Avec $b > 1,\ a \geq 1$

> (Pour $n > n_0,\ T(n) = \Theta(1)$)

- Si $f(n) = O(n^{log_b(a) - \varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$, alors $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, alors $T(n) = \Theta(n^{log_b a} logn)$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b(a) + \varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$, et de plus $\exists c < 1$ tel que $af(n/b) \leq cf(n)$alors $T(n) = \Theta(f(n))$
- Sinon c'est dommage.



Applications

- Exercice 1 :
  $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$

> $\lfloor n/2 \rfloor = n/2 = O(1)$
> $\lceil n/2 \rceil = n/2 = O(1)$

$T(n) = 2T((n/2) + O(1)) + \Theta(n)$

> Avec $a = b = 2$ et $log_2 2 = 1$

$\Theta(n) = O(n^{1-\varepsilon})$ *ou* $\Theta(n^1)$ *ou* $\Omega(n^{1+\varepsilon})$?
Ici $\Theta(n) = \Theta(n^1) \Rightarrow T(n) = \Theta(nlogn)$

- Exercice 2 :
  $T(n) = 2T(n/3) + \sqrt{n}$

> Avec $a = 2, b = 3$ et $log_3 2 \simeq 0,63...$

$n^{0,5} = sqrt(n) = O(n^{log_3 2 - \varepsilon})$ si $\varepsilon = 0,1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{log_3 2})(\neq \Theta(n^{0,63}))$

- Exercice 3 :
  $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

> Avec $a = b = 2$ et $log_2 2 = 1$

$n^2 = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ si $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ et de plus avec $c = (1/2) < 1$ on a bien
$af(n/b) > cf(n) \iff 2(n/2)^2 \leq cn^2 \iff (n^2/2) \leq cn^2$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

- Exercice 4 :
  $T(n) = 2T(n/2) + nlog_2n$

> Avec $a = b = 2 \Rightarrow log_2 2 = 1$

$nlog_2n = \Omega(n^{1+\varepsilon}) \iff \exists d > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n + 0.dn^{1+\varepsilon} \leq nlog_2n \iff d \leq \frac{log_2n}{n^{\varepsilon}} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

>> d n'existe pas

Par substitution :

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + nlog_2n \\ &= 2(2T(n/4) + (n/2)log_2(n/2)) + nlog_2n \\ &= 4T(n/4) + nlog_2n(n/2) + nlog_2n \\ &= 4(2T(n/8) + (n/4)log_2(n/4)) + nlog_2(n/2) + nlog_2n \\ &= 8T(n/8) + nlog_2n(n/4) + nlog_2(n/2) + nlog_2n \end{aligned}$$

Apres $i - 1$ substitutions :

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^i T\frac{n}{2^i} + n\sum_{k=0}^{i-1} log_2\frac{n}{2^k} \\ &= 2^i T\frac{n}{2^i} + n\sum_{k=0}^{i-1}(log_2(n) - k) \\ &= 2^i T\frac{n}{2^i} + nilog_2n - n\sum_{k=0}^{i-1} k \\ &= 2^i T\frac{n}{2^i} + nilog_2n - n\frac{(i-1)i}{2} \end{aligned}$$

> $n/2^i = 1$ quand $i = log_2n$

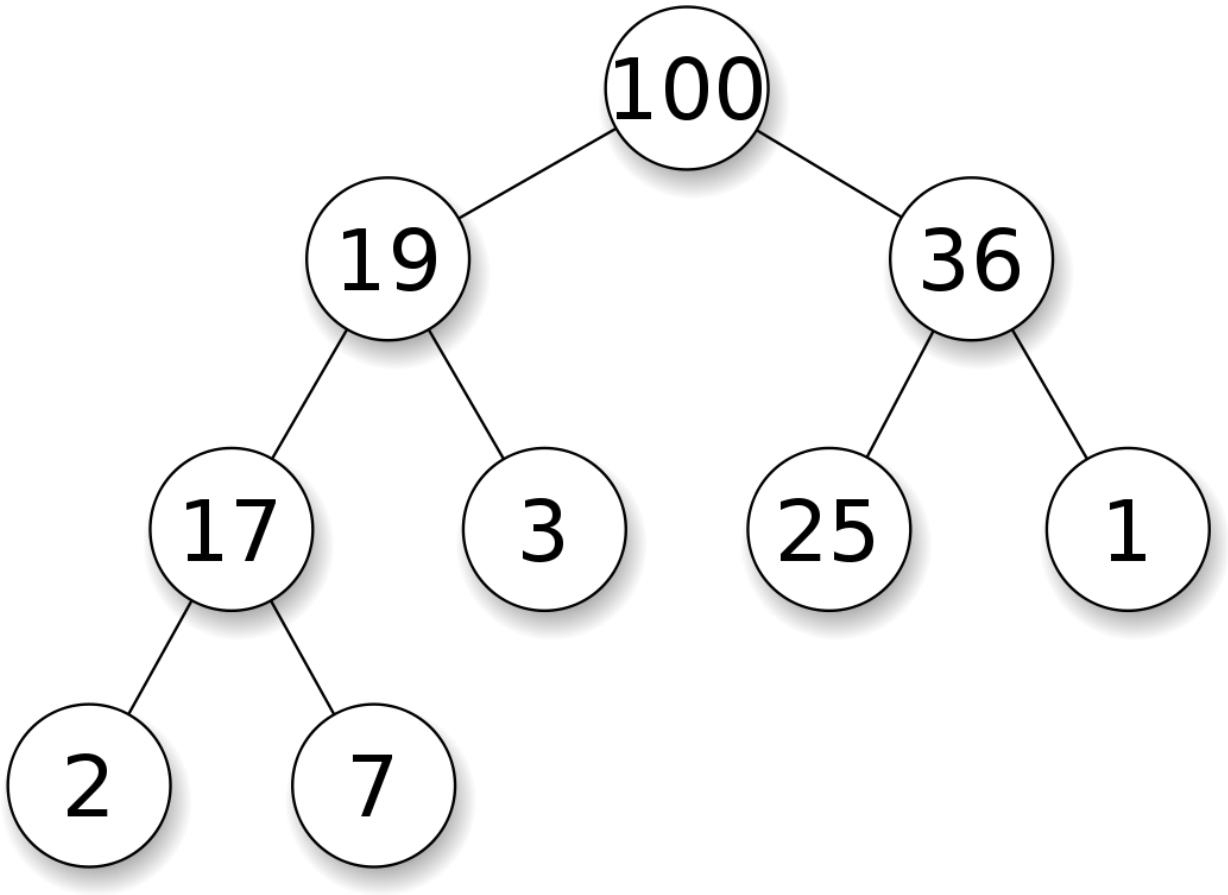
$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{log_2n}T(\frac{n}{2^{log_2n}}) + n(log_2n)^2 - \frac{((log_2n) - 1)log_2n}{2}n \\ &= \Theta(n) + \Theta(n(log_2n)^2) \end{aligned}$$

Donc $T(n) = \Theta(n(log_2n)^2)$

HeapSort

Arbre parfait

C'est un arbre binaire dont tous les niveaux sont pleins sauf le dernier où toutes les feuilles sont à gauche.



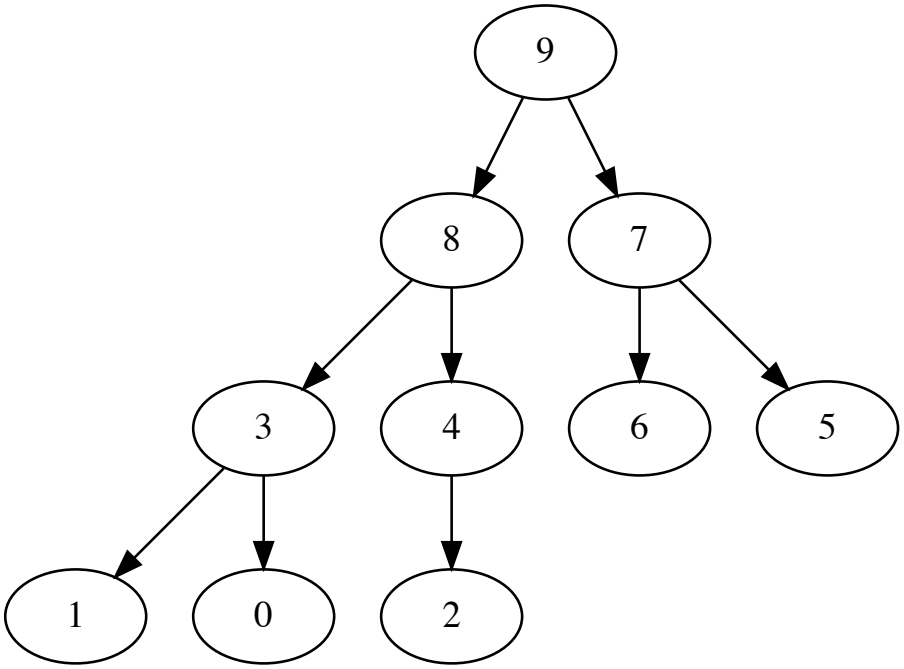
Peuvent etre stockés dans un tableau sans pointeur

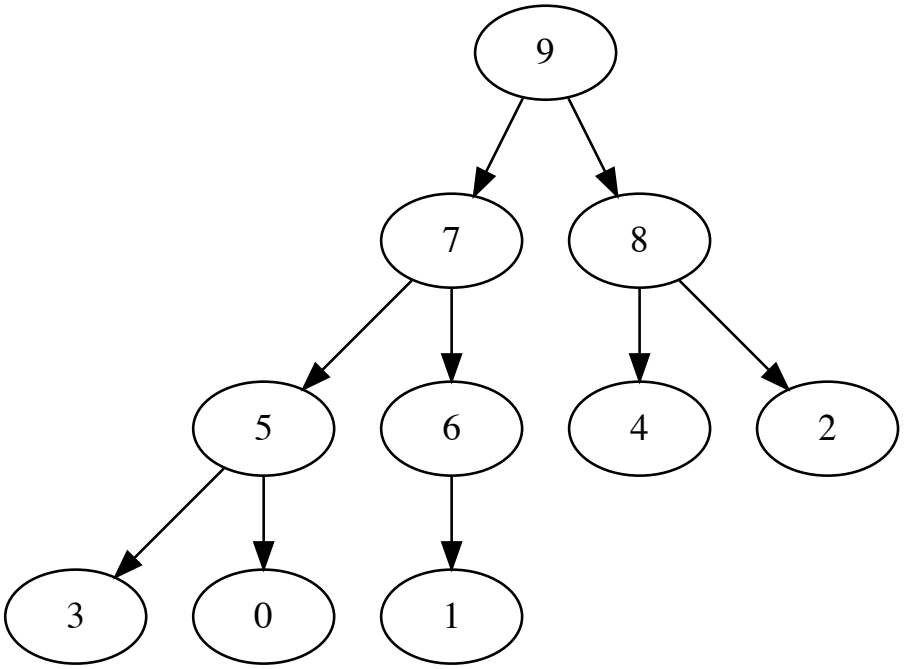
100	**19**	**36**	**17**	**3**	**25**	**1**	**2**	**7**
0	1	2	3	4	5	6	7	8

```
LeftChild(i) = 2i + 1
RightChild(i) = 2i + 2
Parent(i) = ⌊(i − 1) / 2⌋
```

Tas Max

C’est un arbre parfait où chaque sommet est plus grand que ses fils
Plusieurs Tas Max peuvent représenter le même ensemble de valeurs

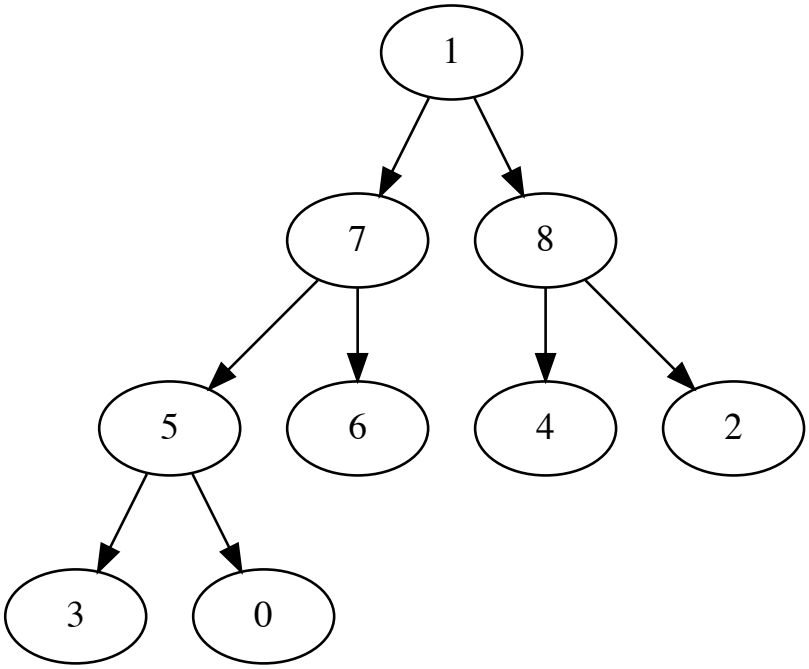


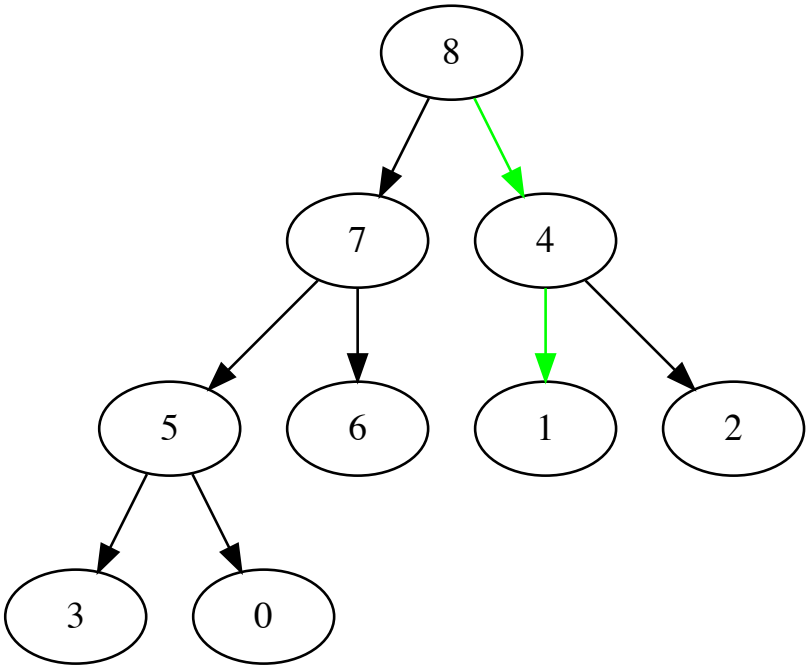


Suppression du max

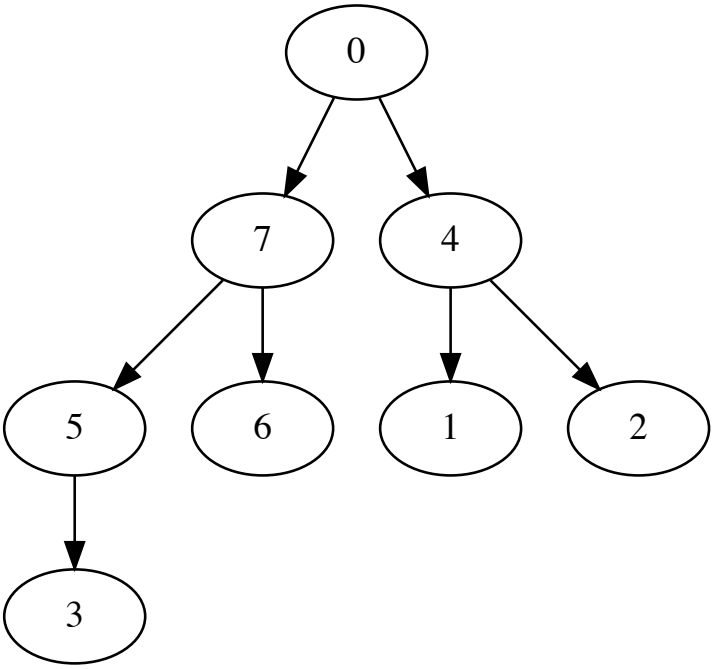
On supprime l'élément max qu'on remplace par le dernier élément du tableau, puis on permute avec son plus grand fils recursivement

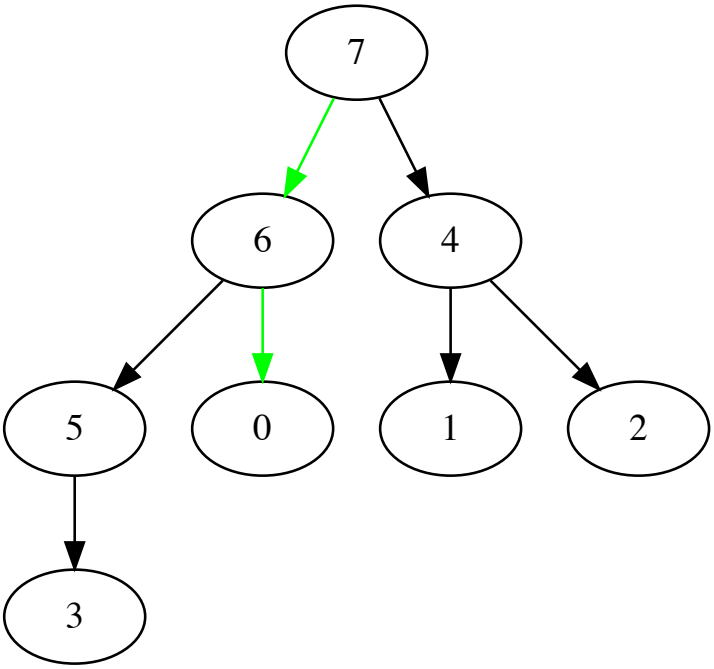
- Suppression du 9





- Suppression du 8



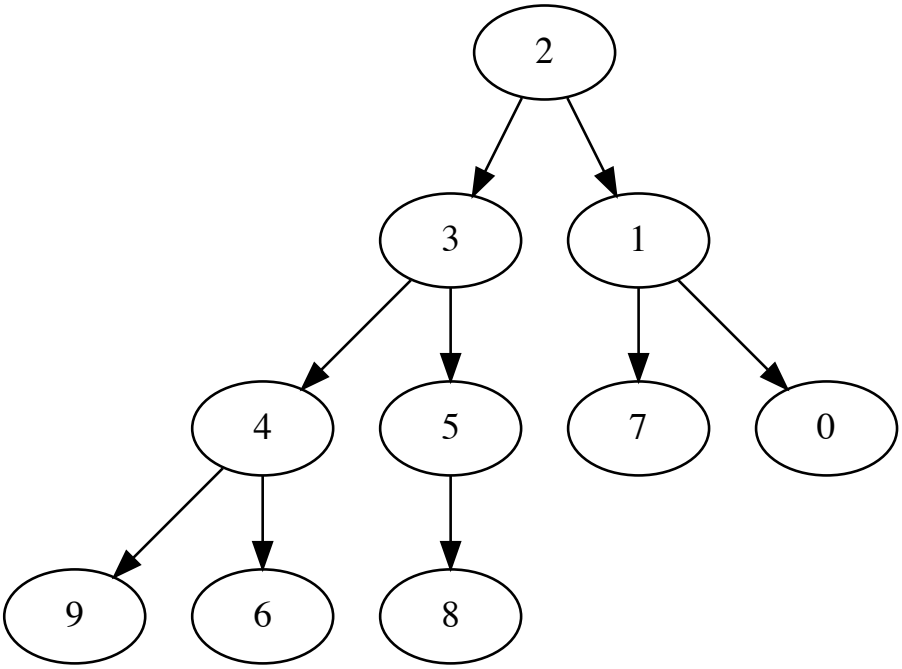


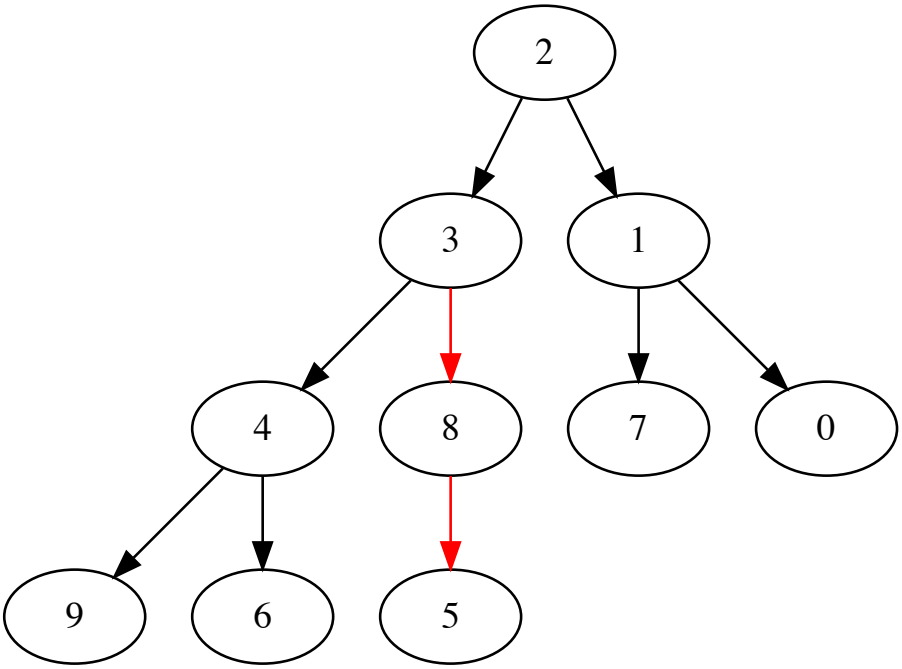
L’idée du tri par tas :

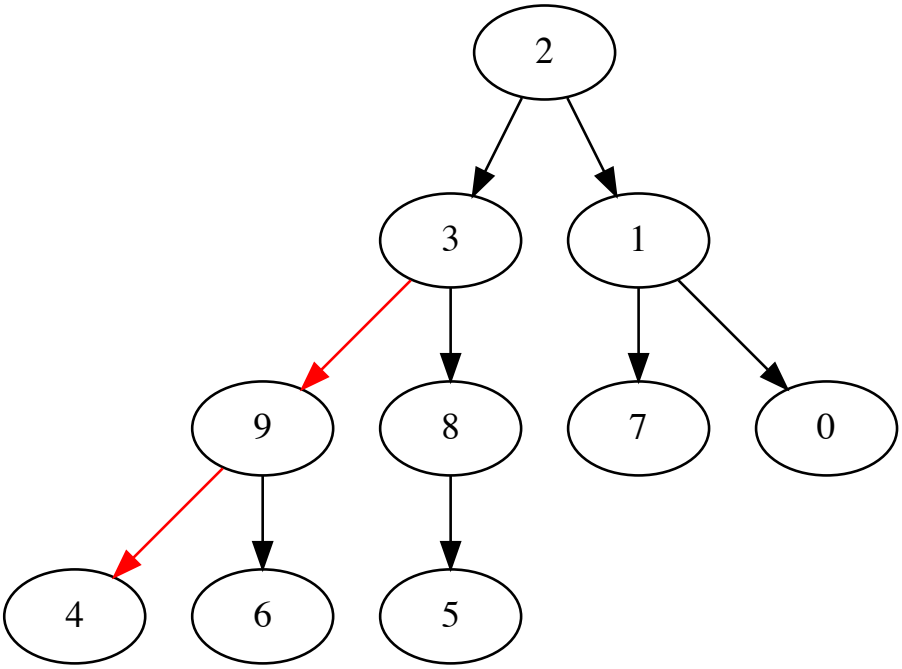
1. Construction du tas pour les valeurs à trier
2. Retirer les max les uns après les autres pour remplir le tableau par la droite

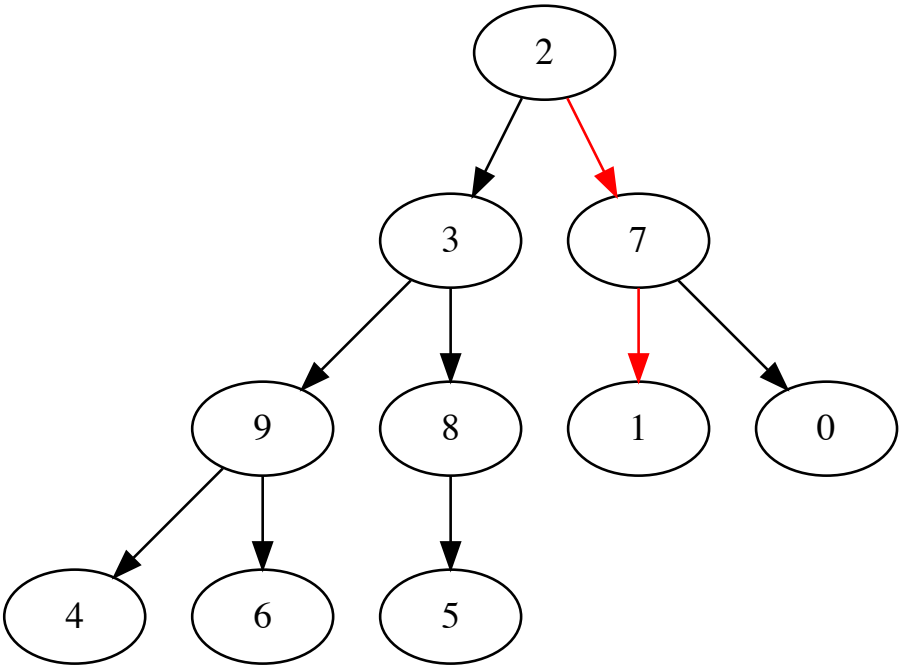
Construire un tas

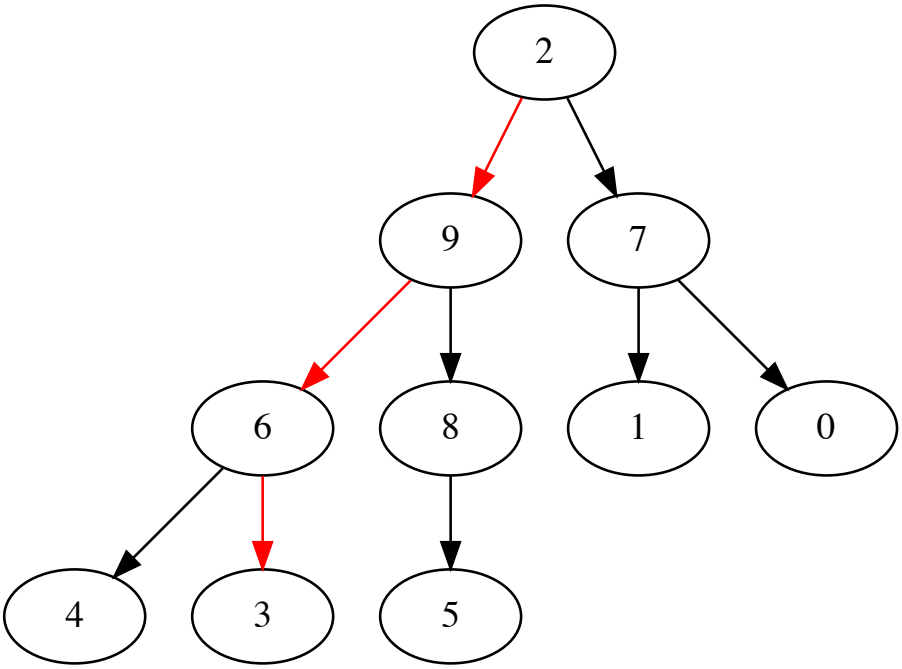
Exemple : 2 3 1 4 5 7 0 9 6 8

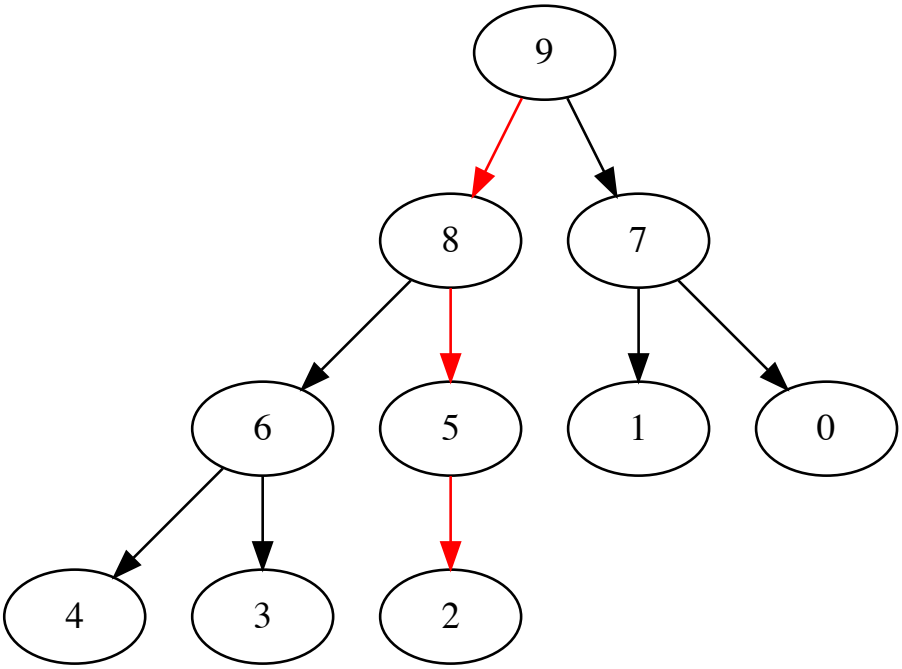

2
3
1
4
5
7
0
9
6
8


2
3
1
4
8
7
0
9
6
5


2
3
1
9
8
7
0
4
6
5


2
3
7
9
8
1
0
4
6
5





Heapify

> Sommet i tel que le FD et FG sont des fils >> Le sommet i est la racine d'un tas

```
Heapify(A, i, n):
    l <- LeftChild(i)
    r <- RightChild(i)
    if l < n and A[l] > A[i]
        largest <- l
    else
        largest <- i
    if r < n and A[r] > A[largest]
        largest <- r
    if largest != i
        A[i] <-> A[largest]
        Heapify(A, largest, n)


BuildHeap(A, n):
    for i <- n/2 down to 0
        Heapify(A, i, n)


HeapSort(A, n)
    BuildHeap(A, n)
    for i <- n - 1 down to 1
        A[i] <-> A[0]
        Heapify(A, 0, i)
```