

Formalismes, Ensembles et Structures

1. Vocabulaire relatif aux ensembles, aux applications et aux relations

Edouard Marchais

EPITA

edouard.marchais@epita.fr



Motivation

⇒ Pourquoi ce cours ?

- La programmation algorithmique requiert la manipulation d'**objet formels** tels que des listes de nombres, de caractères, etc...
- Ces objets appartiennent à des **structures mathématiques** générales précises et qui répondent donc à un certain nombre de **règles**.
- Pour élaborer des programmes **efficaces** et **cohérents** il est donc nécessaire de se familiariser avec les **structures de bases algébriques** (tels que le corps des réels, des complexes, etc...) ainsi qu'avec les règles de **logique classique** qui les gouvernent.
- Dans cours nous allons donc nous intéresser à cette partie des mathématiques qui servira de **socle** pour des cours plus avancés d'algorithmique, de structures de données, etc...

Table des matières

- 1 **Ensembles**
 - Ensembles et éléments
 - Sous-ensembles
 - Produit cartésien
 - Quantificateurs
 - Négation d'une proposition
 - Négation d'une proposition avec des quantificateurs
- 2 **Ensemble des parties d'un ensemble**
 - Ensemble $\mathcal{P}(E)$
 - Opérations dans $\mathcal{P}(E)$
 - Propriétés
 - Exercice d'application
- 3 **Application d'un ensemble dans un autre**
 - Définition
 - Composition des applications
 - Famille d'éléments d'un ensemble
- 4 **Injectivité et surjectivité**
 - Équation
- 5 **Image directe ou réciproque d'une partie**
 - Image d'une partie de l'ensemble de départ
 - Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée
- 6 **Relation d'ordre**
 - Relation binaire
 - Relation d'ordre
 - Relation d'équivalence
 - Exercice d'application
 - Exemples
 - Vocabulaire lié à l'ordre
- 7 **Exercices**
 - Étude d'une relation d'ordre
 - Vrai ou faux ?
 - Quantificateurs
 - Applications
 - Relations d'ordre

Déroulement du cours

⇒ Comment le cours va se passer ?

- Le cours se déroulera sur 3 séances de 3 heures.
- Chaque séance se divise en une moitié de cours (~1h30) et une moitié d'exercices (~1h30).
- On a donc trois thèmes successifs à traiter :
 - 1 Vocabulaire relatif aux ensembles, aux applications et aux relations
 - 2 Nombres entiers naturels - Combinatoire
 - 3 Structures algébriques usuelles
- Les évaluations se feront avec une partie en ligne et l'autre de manière plus classique (exercices à rendre, etc...)
- Vous serez prévenus !!! (don't panic)

Déroulement du cours

⇒ Comment aborder ce cours?

- Vous êtes en charge !!
- Cela implique :
 - ① Prendre de notes
 - ② Poser des questions
 - ③ Faire les exercices
- Sans cela, les séances vont vous paraître interminables et vous perdrez votre temps
- Votre retour sur le cours est **essentiel** !!
- Le cours sera mis en ligne et mis à jour régulièrement. Sans votre aide cela ne se fera pas...
- On essaiera de couvrir la majorité du cours à chaque séance
- Si on ne fait pas tout vous aurez le matériel de cours mis en ligne de toute façon de manière à ce que cela vous serve de **référence** pour plus tard

Introduction générale

- Les différentes parties des mathématiques ont acquis à la fin du XIXe siècle un langage commun : celui de la **théorie des ensembles**.
- La formalisation des définitions, des théorèmes et des démonstrations permet d'**éviter toute ambiguïté**, et d'atteindre un haut niveau de rigueur.
- Cependant, son **usage excessif** rend les énoncés mathématiques très difficiles à déchiffrer. Nous utiliserons donc ce langage avec **modération**, chaque fois qu'il permet de préciser et de clarifier une notion, de trancher des cas litigieux, ou de valider une démonstration, mais sans jamais perdre de vue le sens des propositions manipulées.

Bibliographie

- Livres de mathématiques en prépa (1ère année)
- Livres de Licences (L1) en maths ou maths pour l'informatique
- Ressources en ligne de l'école (constamment mis à jour...)

1. Ensembles

1.1 Ensembles et éléments

- La notion d'ensemble est une notion première que nous ne chercherons donc pas à définir.
- Disons seulement qu'un ensemble est un objet auquel peut appartenir ou *ne pas appartenir* un autre objet. On note

$$\begin{cases} x \in E \text{ pour « } x \text{ appartient à } E \text{ »} \\ x \notin E \text{ pour « } x \text{ n'appartient pas à } E \text{ »} \end{cases}$$

- On appelle **élément** de l'ensemble E un objet qui appartient à E .

- On ne peut pas cependant considérer n'importe quelle collection d'objets comme un ensemble sous peine d'aboutir à des contradictions, comme le montre le paradoxe suivant dû au mathématicien anglais Bertrand Russel (1902).

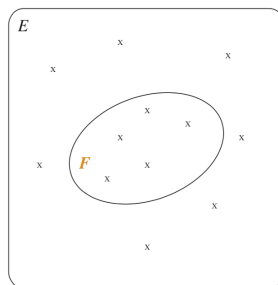
Paradoxe de Russel

- Un ensemble peut être ou non élément de lui-même. Supposons que l'on puisse définir l'ensemble E de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Cet ensemble E est-il élément de lui-même ?
- si $E \in E$, il ne satisfait pas à la définition
- si $E \notin E$, il satisfait à la définition, donc $E \in E$...

Ce paradoxe est parfois présenté sous forme imagée par l'histoire d'un barbier qui se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?

1.2 Sous-ensembles

- Soit E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si tout élément de F est élément de E .
- On note $F \subset E$. On dit aussi que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E . *Exemple* : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



- Pour échapper à ce type de contradiction, il convient de respecter des règles précises pour définir des ensembles.
- Certains ensembles sont définis de façon **axiomatique** (par exemple $\mathbb{N}$).
- D'autres peuvent être **construits** à partir de ceux-là à l'aide d'opérations convenables (par exemple $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$).
- Le but de la théorie des ensembles (que nous n'aborderons pas) est de valider les opérations qui ne risquent pas de conduire à des contradictions.

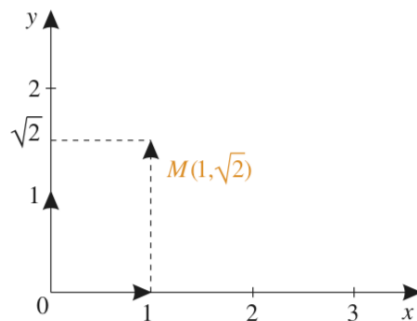
- Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire si chacun est inclus dans l'autre :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

- Un sous-ensemble de E peut être défini comme l'ensemble des éléments de E vérifiant une certaine proposition.
- *Exemple*: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.
- *Exercice* : Trouver d'autres exemples...

- En particulier, si cette proposition est impossible, on obtient l'**ensemble vide**, qui doit donc être considéré comme un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. On le note $\emptyset$.
- *Exemple*: $\{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } x < 0\} = \emptyset$.
- *Exercice* : Trouver d'autres manières de construire $\emptyset$...
- Un ensemble qui possède un unique élément est appelé **singleton**. Il ne faut pas confondre l'élément x et le singleton $\{x\}$. On peut par exemple écrire : $2 \in \mathbb{N}$ ou $\{2\} \subset \mathbb{N}$, mais pas l'inverse.

- *Exemple* : $(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ peut être identifié à un plan muni d'un repère cartésien, le couple (x, y) étant représenté par le point de coordonnées x et y .



- Soit E et F deux ensembles. On peut construire un nouvel ensemble appelé **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F .

$$(x, y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F)$$

- Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$, $E \times E \times E = E^3$, etc...

1.4 Quantificateurs

- Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un certain ensemble E .
- La proposition $\forall x \in E, P(x)$ signifie que **tout élément** x de E vérifie la proposition $P(x)$.

$$\forall x \in E, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} = E$$

- La proposition $\exists x \in E, P(x)$ signifie qu'il existe **au moins un élément** x de E qui vérifie la proposition $P(x)$.

$$\exists x \in E, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} \neq \emptyset$$

- Soit P une proposition qui est vraie (valeur binaire 1) ou fausse (valeur binaire 0).
- On note $\overline{P}$ la négation de la proposition P , c'est-à-dire la proposition qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie. Notons que :

$$\begin{aligned}\overline{P \text{ ou } Q} &\iff \overline{P} \text{ et } \overline{Q} \\ \overline{P \text{ et } Q} &\iff \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}\end{aligned}$$

- “ et ” se note aussi “ $\wedge$ ”
- “ ou ” se note aussi “ $\vee$ ”

- Ainsi, la proposition $P \Rightarrow Q$ est fausse exactement lorsque P est vraie et Q fausse.
- Le connecteur « implique » a donc une propriété qui le **différencie** d'un « donc » intuitif : d'après la table de vérité ci-dessus, si une proposition P est fausse, alors elle implique n'importe quelle autre proposition Q , vraie ou fausse.
- La négation de $P \Rightarrow Q$ s'écrit donc

$$\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$$

- D'autre part, comme l'implication $P \Rightarrow Q$ possède la **table de vérité**

P	Q	$P \Rightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

- La proposition $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à $\overline{P} \text{ ou } Q$, dans le cadre de la **logique classique**.

- Notons par ailleurs que :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

- C'est la **contraposée** de l'implication ; elle peut parfois être plus facile à démontrer que l'implication elle-même.
- C'est le principe du **raisonnement par l'absurde** : on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer, et on cherche une contradiction avec l'une des hypothèses.

- La proposition $\forall x \in E, P(x)$ signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$; sa négation est qu'il en existe au moins un qui ne la vérifie pas :

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)}$$

- La proposition $\exists x \in E, P(x)$ signifie qu'au moins un élément de E vérifie la propriété $P(x)$; sa négation est qu'aucun d'entre eux ne la vérifie :

$$\overline{\exists x \in E, P(x)} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)}$$

- Ceci permet de former très facilement la négation d'une proposition exprimée à l'aide de quantificateurs. Par exemple, une fonction f est dite bornée sur $\mathbb{R}$ si :

$$\exists m \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq m \text{ et } f(x) \leq M$$

- On en déduit que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall m \in \mathbb{R} \forall M \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} f(x) < m \text{ ou } f(x) > M$$

2. Ensemble des parties d'un ensemble

2.1 Ensemble $\mathcal{P}(E)$

- Tous les sous-ensembles d'un ensemble E constituent un nouvel ensemble, appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

- Exemple** : si $E = \{a, b, c\}$ alors

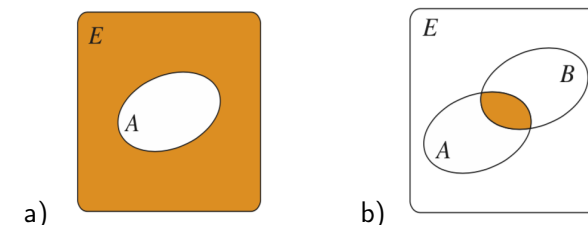
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

- Remarque** : L'ensemble $\mathcal{P}(\emptyset)$ n'est pas vide, puisqu'il contient l'élément $\emptyset$. C'est un singleton : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

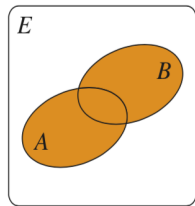
2.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E . On peut définir de nouvelles parties de E par les opérations suivantes :

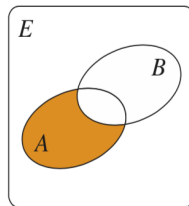
- Complémentaire** : $\complement_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A (équivalent ensembliste de la négation) i.e $\forall x \in E, x \in \complement_E A \Leftrightarrow x \notin A$. **Exemple** : $\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$
- Intersection** : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B (équivalent ensembliste de la conjonction) i.e $\forall x \in E, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$. **Exemple** : $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$



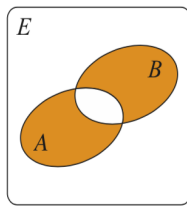
- c) **Réunion** : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (équivalent ensembliste de la disjonction) i.e
 $\forall x \in E, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$. *Exemple* : $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$
- d) **Différence** : $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B (équivalent ensembliste de la négation de l'implication ou encore "privé de") i.e $A \setminus B = A \cap \complement_E B$.
Exemple : $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$
- e) **Différence symétrique** : $A \Delta B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B , mais pas aux deux à la fois (équivalent ensembliste de la disjonction exclusive) i.e
 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Exemple* : $\mathbb{R}_+ \Delta \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^*$



c)



d)



e)

2.4 Exercice d'application

Enoncé :

Soit A, B, C trois parties d'un même ensemble E . Démontrer que :

$$(A \cap B) \cup (C \cap \complement_E A) \subset (A \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B) \cup (B \cap C)$$

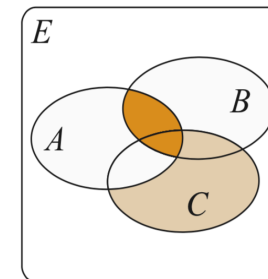
2.3 Propriétés

Les propriétés suivantes sont faciles à établir. Leurs démonstrations sont laissées en exercices. Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E :

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$
- $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$
- $A \subset B \Leftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement_E B \Leftrightarrow B \subset \complement_E A$ (les parties A et B sont dites **disjointes**)

Solution :

Soit x un élément de $(A \cap B) \cup (C \cap \complement_E A)$. x appartient au moins à l'un des deux ensembles $A \cap B$ ou $C \cap \complement_E A$.



Si $x \in A \cap B$:

- soit $x \in C$, alors $x \in B \cap C$;
- soit $x \notin C$, alors $x \in A \cap \complement_E C$;

3. Application d'un ensemble dans un autre

3.1 Définition

Si $x \in C \cap \complement_E A$:

- soit $x \in B$, alors $x \in B \cap C$;
- soit $x \notin C$, alors $x \in \complement_E A \cap \complement_E B$;

Dans tous les cas :

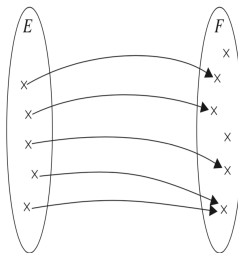
$$x \in (A \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B)$$

Par exemple : l'ensemble des hommes à lunettes et des femmes non fumeuses est inclus dans l'ensemble des hommes fumeurs, des femmes sans lunettes et des non-fumeurs à lunettes.

- Soit E et F deux ensembles.
- On appelle **application** de E dans F la donnée des ensembles E, F , et d'une partie Γ de $E \times F$ telle que pour tout élément x de E il existe un élément y et un seul de F tel que $(x, y) \in \Gamma$.
- E est appelé **ensemble de départ** de l'application.
- F est appelé **ensemble d'arrivée** de l'application.
- Γ est appelé **graphe** de l'application.

- y est appelé **image** de x par l'application. Si on désigne l'application par f on écrit alors $y = f(x)$.
- x est un **antécédent** de y par l'application (mais ce n'est pas forcément le seul...).

• Notation :
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$



Remarque :

La donnée des ensembles E et F fait partie de la définition de l'application. Ainsi, deux applications sont égales si et seulement si elles ont **même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe**. Par exemple, les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

sont différentes : elles n'ont pas du tout les mêmes propriétés (parité, croissance...).

Exemples généraux :

- Application identique de E : $\left| \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{Id}_E} & E \\ x & \longrightarrow & x \end{array} \right|$
- Injection canonique de E dans F ($E \subset F$) : $\left| \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j_E} & F \\ x & \longrightarrow & x \end{array} \right|$
- Projections : $\left| \begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{p_1} & E \\ (x, y) & \longrightarrow & x \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{p_2} & F \\ (x, y) & \longrightarrow & y \end{array} \right|$
- Restriction de f à une partie A de E : $\left| \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & F \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array} \right|$

On dit que f est un **prolongement** de g si g est une restriction de f .

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou mieux F^E (Cette notation sera expliquée plus loin à propos de la notion de famille.)

Théorème 1

Si E, F, G, H sont quatre ensembles et f, g, h trois applications appartenant respectivement à $\mathcal{F}(E, F), \mathcal{F}(F, G), \mathcal{F}(G, H)$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Démonstration

Les deux applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont le même ensemble de départ : E et le même ensemble d'arrivée : H . De plus :

$$\forall x \in E \quad h \circ (g \circ f)(x) = h(g[f(x)]) = (h \circ g) \circ f(x)$$

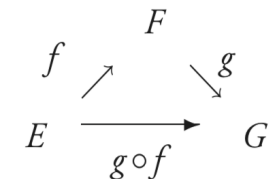
Ces deux applications sont donc égales.

3.2 Composition des applications

- Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .
- On appelle **application composée** de f et g l'application de E dans G qui à un élément x de E fait correspondre l'image par g de l'image par f de x .
- On note cette application $g \circ f$. Attention à l'ordre qui peut paraître paradoxal, mais qui est en fait très commode, en effet :

$$\forall x \in E \quad g \circ f(x) = g[f(x)]$$

- Exemples : $f \circ \text{Id}_E = f$; $\text{Id}_F \circ f = f$.



3.3 Famille d'éléments d'un ensemble

- On appelle **famille d'éléments d'un ensemble** E indexée par un ensemble I , une application de I dans E notée :

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longrightarrow & x_i \end{array} \right|$$

- On peut identifier le produit cartésien $E \times E$ avec l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par l'ensemble $\{1, 2\}$, et plus généralement le produit cartésien E^n avec l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par $\{1, \dots, n\}$.

- Par analogie, quel que soit l'ensemble I , on note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I , ou, ce qui revient au même, l'ensemble des applications de I dans E .
- On peut généraliser aux familles de parties d'un ensemble E les notions d'intersection et de réunion :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$$

La notion de famille n'est donc pas différente de celle d'application, il s'agit seulement d'utiliser des indices pour représenter les images. Par exemple, une suite numérique est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

4.2 Application injective

- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On dit que f est **injective** (ou que c'est une **injection**) si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution x dans E .
- À l'aide de quantificateurs, l'injectivité de f s'écrit :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- Exemples :

1. Id_E est injective.
2. Toute application de $\emptyset$ dans F est injective.
3. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$ est injective

4. Injectivité et surjectivité

4.1 Équation

- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On appelle **équation** une égalité de la forme $f(x) = y$, où y est un élément fixé de F ; on appelle **solution** de l'équation tout élément x de E qui vérifie cette égalité, autrement dit tout antécédent de y par f .
- Une équation peut avoir une solution unique, par exemple : $3x = 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; plusieurs solutions, par exemple : $x^2 = 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; une $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; ou encore aucune solution, par exemple : $x^2 = -1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2

1. La composée de deux injections est une injection.
2. Si la composée $g \circ f$ est injective, f est injective.

Démonstration

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F , et g une application de F dans G .

1. Supposons f et g injectives. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Du fait de l'injectivité de g , $f(x) = f(x')$, et, du fait de l'injectivité de f , $x = x'$. Donc $g \circ f$ est injective.
2. Supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et, du fait de l'injectivité de $g \circ f$, on a $x = x'$. Donc f est injective.

4.3 Application surjective

- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .
- On dit que f est **surjective** (ou que c'est une **surjection**) si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet toujours une solution x dans E .
- À l'aide de quantificateurs, la surjectivité de f s'écrit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y$$

- Exemples :

- 1 Id_E est surjective.
- 2 Toute application de E dans $\emptyset$ est surjective. (si $E = \emptyset$, il n'y en a aucune !)
- 3 L'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{cases}$ est surjective

4.4 Application bijective

- Une application f de E dans F est dite **bijective** (ou on dit que c'est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans E .
- Exemples :

- 1 Id_E est bijective.
- 2 Toute application de $\emptyset$ dans $\emptyset$ est bijective.
- 3 L'application $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{cases}$ est bijective

Théorème 3

- 1 La composée de deux surjections est une surjection.
- 2 Si la composée $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Démonstration

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F , et g une application de F dans G .

- 1 Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. z possède un antécédent y dans F par g , et y possède un antécédent x dans E par f .
 $g \circ f(x) = g(y) = z$; x est donc un antécédent de z par $g \circ f$. Cette application est surjective.
- 2 Supposons $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. z possède un antécédent x dans E par $g \circ f$, d'où $z = g \circ f(x) = g(f(x))$; $f(x)$ est donc un antécédent de z dans F par g . L'application g est surjective.

Théorème 4

- 1 La composée de deux bijections est une bijection.
- 2 Si la composée $g \circ f$ est bijective, g est surjective et f injective.
- 3 L'application f de E dans F est bijective si et seulement si il existe une application de F dans E notée f^{-1} telle que

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$$

L'application f^{-1} est appelée **bijection réciproque** de f .

- 4 Si f et g sont deux bijections, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

- 1 Découle du **Théorème 2**
- 2 Découle du **Théorème 3**
- 3 Si f est bijective, tout élément de F possède un antécédent et un seul par f , ce qui permet de définir de F dans E l'application, notée f^{-1} :

$$\forall y \in F \quad f^{-1}(y) = x$$

où x est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. On a alors de façon immédiate :

$$\forall x \in E \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

- 4 On calcule

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_E$$

Une application f de E dans E est dite involutive (c'est une involution) si $f \circ f = \text{Id}_E$, c'est-à-dire si f est bijective et si $f^{-1} = f$.

5.2 Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée

- Soit f une application de E dans F , et B une partie de F .
- On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B , autrement dit l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B .
- Par abus de notation, cet ensemble est noté $f^{-1}(B)$, mais f^{-1} ne désigne généralement pas une application, et il faut bien se garder de croire que l'image réciproque par f soit l'image directe par une autre application... (sauf quand f est bijective ; l'image réciproque d'une partie est alors l'image de cette partie par la bijection réciproque).

5. Image directe ou réciproque d'une partie

5.1 Image d'une partie de l'ensemble de départ

- Soit f une application de E dans F , et A une partie de E .
- On appelle **image** de A par f l'ensemble des images des éléments de A .
- Par abus de notation, cet ensemble est noté $f(A)$, mais il faut bien garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas de l'image d'un élément de E . On a donc par définition :

$$\forall y \in F \quad y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$$

- *Exemple* : Si f est l'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sin x \end{cases}$, $f([0, \pi]) = [0, 1]$.
Ici l'intervalle $[0, 1]$ est l'image de $[0, \pi]$ par f

- Par définition :

$$\forall x \in E \quad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

- *Exemple* : Si f est l'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sin x \end{cases}$
alors on peut écrire

$$f^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

6. Relation d'ordre

6.1 Relation binaire

- On appelle **relation binaire** définie sur un ensemble E la donnée de E et d'une partie quelconque Γ de $E \times E$. On note $x\mathcal{R}y$ pour $(x, y) \in \Gamma$.
- Exemples : Dans $\mathbb{Z}$: $|x| = |y|$, $x \neq y$, x divise y , etc...

6.3 Relation d'équivalence

- Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est :
 - ① **réflexive** : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
 - ② **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
 - ③ **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- On définit la **classe d'équivalence** $[x]$ d'un élément x de E comme l'ensemble des y de E tels que

$$y \in [x] \iff x\mathcal{R}y$$

- On appelle **représentant** de $[x]$ n'importe quel élément de $[x]$, et **système de représentants des classes** toute **partie** de E qui contient exactement un représentant par classe.

6.2 Relation d'ordre

- Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est :

- ① **réflexive** : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
- ② **antisymétrique** : $\forall (x, y) \in E^2 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
- ③ **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

- L'ordre est dit **total** s'il permet de comparer deux éléments quelconques :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x$$

- L'ordre est dit **partiel** dans le cas contraire. Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit **ordonné** (respectivement **totalement ordonné** ou **partiellement ordonné**).

Enoncé :

On définit sur l'ensemble discret $\llbracket 0, 7 \rrbracket$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \llbracket 0, 7 \rrbracket^2, \quad x\mathcal{R}y \iff 3 \text{ divise } x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Objectif :

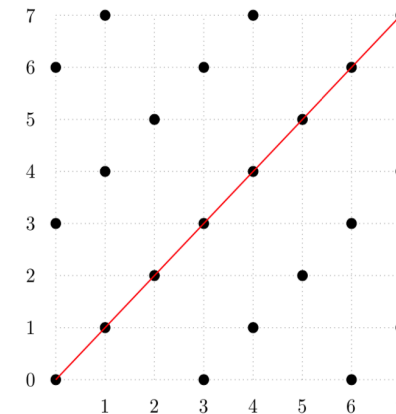
On veut démontrer le caractère **réflexif**, **symétrique** et **transitif** de la relation $\mathcal{R}$ pour chaque couple $(x, y) \in \llbracket 0, 7 \rrbracket^2$.

Démarche :

On évalue la proposition « 3 divise $x - y$ » pour chaque couple $(x, y) \dots$

Méthode :

On va représenter schématiquement le résultat de cette évaluation dans un repère orthonormé. Cela représente le **graphe** de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.



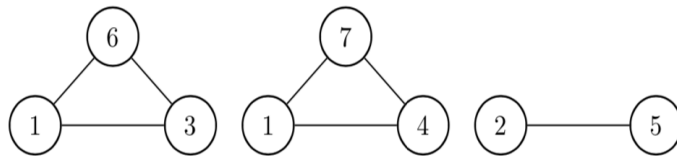
Interprétation :

- La droite $y = x$ représente la **réflexivité** de la relation $\mathcal{R}$.
- La symétrie de répartition des points de part et d'autre de la droite correspond à la propriété de **symétrie**.
- La propriété de **transitivité** se traduit comme suit : étant donné 3 éléments a, b et c dans E tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$ alors les droites données par les équations $x = a$ et $y = c$ ont une intersection dans E qui est non vide.

Graphes combinatoires :

- On représente dans celle-ci les éléments de E par des noeuds (sommets du graphes) labélisés par ceux-ci.
- Si un élément $x \in E$ est en relation avec un élément $y \in E$ on relie x à y par une flèche (un arc du graphes).
- Dans le cas d'une relation d'équivalence, le graphe combinatoire correspondant aura les propriétés suivantes :
 - par la **réflexivité** tous sommet aura une boucle de lui vers lui-même ;
 - par la **symétrie** si on a un arc entre deux sommets distincts dans un sens on a également l'arc dans le sens opposé ;
 - par la **transitivité** si un arc relie x à y et un autre y à z alors il existe également un arc qui relie x à z ;

- Pour simplifier la représentation graphique dans le cas d'une relation d'équivalence on ignore les boucles d'un sommet vers lui-même et on remplace les arcs entre deux mêmes sommets par une unique arête (arc sans tête ni origine).
- On obtient ainsi un graphe non-orienté simple. Avec cette représentation on voit notamment graphiquement (et assez simplement) les classes d'équivalence de la relation, elles correspondent aux composantes connexes du graphe.



- Si E est un ensemble ordonné par la relation $\leq$, on peut munir le produit cartésien $E \times E$ de l'ordre dit **lexicographique** défini par :

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

- On peut généraliser cette définition à l'ensemble E^n . C'est le principe de l'ordre alphabétique appliqué aux suites de lettres de l'alphabet.

Attention !

La relation, dite « d'ordre strict », $x < y$, qui signifie $x \leq y$ et $x \neq y$, n'est pas une relation d'ordre (puisqu'elle n'est pas réflexive).

6.5 Exemples

Ensembles	Relations	Ordre
$\mathbb{R}$	$\leq$	total
$\mathcal{P}(E)$	$\subset$	total
$\mathbb{N}$	divise	partiel

- Par analogie avec le premier exemple, une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ qu'elle soit totale ou partielle.
- Il faut prendre garde à ne pas céder aux automatismes que pourraient suggérer cette notation : beaucoup de relations d'ordre ont des propriétés très différentes de celles de l'ordre total de $\mathbb{R}$.

6.6 Vocabulaire lié à l'ordre

Soit E un ensemble ordonné par la relation et A une partie de E . On appelle :

- Majorant de A un élément de E supérieur ou égal à tous les éléments de A .

$$M \text{ majore } A \iff \forall a \in A \quad a \leq M$$

Une partie est dite **majorée** si elle possède un majorant.

- Minorant de A un élément de E inférieur ou égal à tous les éléments de A .

$$m \text{ minore } A \iff \forall a \in A \quad a \leq m$$

Une partie est dite **minorée** si elle possède un minorant.

- **Plus grand élément** de A (ou élément **maximum**) un majorant de A appartenant à A . S'il existe, il est unique. On le note $\max A$.
- **Plus petit élément** de A (ou élément **minimum**) un minorant de A appartenant à A . S'il existe, il est unique. On le note $\min A$.
- **Borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A , s'il existe. Il est alors unique, on le note $\sup A$. (Si A possède un plus grand élément, il est nécessairement borne supérieure.)
- **Borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A , s'il existe. Il est alors unique, on le note $\inf A$. (Si A possède un plus petit élément, il est nécessairement borne inférieure.)

Exemple : Si $E = \mathbb{R}$, la partie $A =]0, 1]$ est minorée (par -1 par exemple) et majorée (par 3 par exemple). Elle admet un plus grand élément : 1, qui est donc aussi sa borne supérieure.

$$\max]0, 1] = \sup]0, 1] = 1$$

A n'admet pas de plus petit élément, mais une borne inférieure :

$$\inf]0, 1] = 0$$

Si E et F sont deux ensembles ordonnés, une application f de E dans F est dite

- **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

- **strictement croissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

- **décroissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

- **strictement décroissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

7. Exercices

7.1 Étude d'une relation d'ordre

On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\preceq$ définie par :

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

- 1 Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel?
- 2 Le disque fermé de centre O de rayon 1 a-t-il des majorants? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

1 La relation $\preceq$ est :

- **réflexive** : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$x \leq x \quad \text{et} \quad y \leq y.$$

- **antisymétrique** : pour tous couples (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$ on a

$$x \leq x', y \leq y', x \leq x, y' \leq y \implies (x, y) = (x', y')$$

- **transitive** : pour tous couples (x, y) , (x', y') et (x'', y'') de $\mathbb{R}^2$ on a

$$x \leq x', y \leq y', x' \leq x'', y' \leq y'' \implies x \leq x'', y \leq y''$$

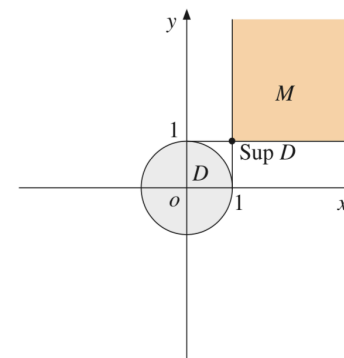
C'est donc une **relation d'ordre**. L'ordre est **partiel** : on ne peut pas classer par exemple les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$.

2 Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Supposons que D possède un plus grand élément (x_0, y_0) . On a alors

$$(1, 0) \in D \quad \text{d'où} \quad x_0 \geq -1 \quad \text{et} \quad y_0 \geq 0$$

$$(0, 1) \in D \quad \text{d'où} \quad x_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad y_0 \geq 1$$



Les inégalités $x_0 \geq 1$ et $y_0 \geq 1$ sont incompatibles avec l'inégalité $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$ qui caractérise l'appartenance de (x_0, y_0) à D . D n'a donc pas de plus grand élément.

L'ensemble des majorants de D est :

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \quad \text{et} \quad y \geq 1\}$$

La borne supérieure de D est le plus petit des majorants de D , c'est-à-dire $(1, 1)$.

7.2 Vrai ou faux ?

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* \quad x = 0$.
- 2 $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 < 0 \implies x < 0$.
- 3 La négation de $(P \implies Q)$ est $(\overline{Q} \implies \overline{P})$.
- 4 $\mathbb{R}_+ \Delta \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^*$.
- 5 $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
- 6 Soit $f \in F^E$, f injective $\iff \forall (x, y) \in E^2 \quad x = y \text{ ou } f(x) \neq f(y)$.
- 7 Deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = \text{Id}_E$ sont bijectives.
- 8 Si f et g sont bijectives, $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 9 Soit $f \in F^E$ pour tout élément x de E . $f(x) \in f(A) \implies x \in A$.
- 10 Dans $\mathbb{R}^*$, la relation $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre.
- 11 Dans $\mathbb{C}$, la relation $|z| \leq |z'|$ est une relation d'ordre.

Solution :

- ① Vrai ; puisque $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$.
- ② Vrai ; une proposition fausse implique n'importe quoi...
- ③ Faux ; ces deux implications sont équivalentes.
- ④ Vrai.
- ⑤ Faux.
- ⑥ Vrai.
- ⑦ Faux ; exemple : on peut prendre pour g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $n \mapsto 2n$ et pour f , l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $n \mapsto E(n/2)$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).
- ⑧ Faux ; le matin vous mettez vos chaussettes avant vos chaussures ; le soir, dans quel ordre procédez-vous pour les enlever ?
- ⑨ Faux ; $f(x)$ peut avoir un antécédent dans A , autre que x .
- ⑩ Vrai.
- ⑪ Faux; elle n'est pas antisymétrique.

Solution :

- ① $P_1 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z}, n < p) : \text{vrai } (p = n + 1)$.
- ② $P_2 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, n = pq) : \text{vrai } (n = 0)$.
- ③ $P_3 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2) : \text{faux (si } x < 0)$.
- ④ $P_4 \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}^*, qx \neq p) : \text{vrai } (x = \sqrt{2})$.
- ⑤ $P_5 \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2) : \text{vrai } (x = 1/2)$.
- ⑥ $P_6 \Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \exists (i, j) \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \text{ et } x_i x_j > 0) : \text{vrai (il n'y a que deux signes possibles...)}$.

7.3 Quantificateurs

Écrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et leurs négations. Préciser lesquelles sont vraies.

- ① Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- ② Il existe un entier multiple de tous les autres.
- ③ Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
- ④ Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- ⑤ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- ⑥ Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

7.4 Applications

- ① Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble E dans l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.
Indication : Penser à la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.
- ② Soit E, F, G, H quatre ensembles et $f \in F^E, g \in G^F, h \in H^G$ trois applications. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

Indication :

- ① On suppose qu'il existe une surjection f de E sur $\mathcal{P}(E)$. La partie $A = \{x \in E, x \neq f(x)\}$ aurait un antécédent a par f , c'est-à-dire un élément $a \in E$ tel que $f(a) = A$. Démontrer que $a \in A \Leftrightarrow a \notin A$... (comparer avec le paradoxe de Russel).
- ② Montrer d'abord que g est bijective, puis exprimer f et h à l'aide de g^{-1} .

- ① Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R, R' . On dit que $\mathcal{C}$ est intérieur à $\mathcal{C}'$ si $OO' \leq R' - R$.

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

- ② On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \quad p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q$$

- a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
- b) La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée?

Indication :

- ① La réflexivité est évidente. Antisymétrie : montrer que $OO' < R' - R$ et $OO' < R - R'$ implique $O = O'$ et $R = R'$. Pour la transitivité, utiliser l'inégalité triangulaire : $OO'' \leq OO' + O'O''$.
- ② a) On montre la réflexivité et la transitivité. Antisymétrie : soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$; on suppose qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $p^n = q$ et $q^m = p$. On en déduit que $p^{mn} = p$. Montrer que $p = 1$ ou $mn = 1$ et que, dans les deux cas $p = q$. Il s'agit bien d'une relation d'ordre. L'ordre est partiel : aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ou $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.
- b) Montrer qu'un majorant de $\{2, 3\}$ devrait être à la fois pair et impair.