# Formalismes, Ensembles et Structures

## 2. Nombres entiers naturels - Combinatoire

Edouard Marchais

EPITA

*edouard.marchais@epita.fr*



# Table des matières





# Introduction

- Le plus simple des ensembles de nombres est l'ensemble des entiers naturels. C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) que l'on doit la première axiomatisation de l'ensemble $\mathbb{N}$ en 1889.
- L'une des principales conséquences de ces axiomes est le théorème de récurrence, très utile dans la pratique. Les entiers naturels nous permettront aussi d'étudier les ensembles finis et de traiter les problèmes de dénombrement les concernant.



# 1. Ensemble $\mathbb{N}$ - Récurrence

## 1.1 Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$

Nous admettrons l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$ , non vide, totalement ordonné, vérifiant les propriétés suivantes :

1. toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.
2. toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.
3. $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

Les propriétés suivantes s'en déduisent immédiatement :

- $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, noté $0$.
- $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ a un plus petit élément, noté 1, etc...
  On peut ainsi nommer les entiers naturels successifs.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p > n\}$ a un plus petit élément appelé **successeur** de $n$, et noté $n+1$.
  On a ainsi l'amorce de l'addition de $\mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partie $\{p \in \mathbb{N}, p < n\}$ a un plus grand élément appelé prédécesseur de $n$, et noté $n-1$.





## Théorème 1 (théorème de récurrence)

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel $n$. S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $P(n_0)$ est vraie;
2. $\forall n \geq n_0$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.



**Démonstration**

- Soit $F$ l'ensemble des entiers $n \geq n_0$ tels que $P(n)$ soit faux.
- Il faut montrer que cet ensemble est vide.
- Supposons que $F \neq \varnothing$ . Alors $F$ a un plus petit élément $n_1$ ; donc $n_1 \geq n_0$ et $P(n_1)$ est faux.
- Or $P(n_0)$ est vraie donc $n_1 \neq n_0$, et donc $n_1 > n_0$ , et $n_1 - 1 > n_0$ . Comme $n_1 = \min F$ , $n_1 - 1 \notin F$, donc $P(n_1 - 1)$ est vraie, ce qui contredit l'implication $P(n_1 - 1) \Rightarrow P(n_1)$.
- En définitive, $F = 0$ ; donc $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

## Exercice d'application 1

Démontrer que $\forall n \geq 4$ , $n^2 \geq 2^n$.



## Exercice d'application 1 - Solution

1. La propriété est vérifiée pour $n = 4$, car $4^2 = 2^4 = 16$.
2. Soit $n \geq 4$ tel que $n^2 \leq 2^n$.

   En multipliant par 2 les deux membres, on en déduit : $2n^2 \leq 2^{n+1}$

   Comparons $(n+1)^2$ et $2n^2$ : $(n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1$.

   Ce trinôme admet pour racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ ; il est positif entre les racines, c'est-à-dire pour les entiers 0, 1, 2 et négatif au delà, c'est-à-dire pour tout entier supérieur ou égal à 3.

   Ici $n \geq 4$, donc $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$ : la proposition est vérifiée pour $n+1$.

   Le théorème de récurrence permet de conclure que $\forall n \geq 4$ on a $n^2 \leq 2^n$.

Cet exemple est instructif, car la proposition $P(2)$ est vraie, mais on ne peut pas choisir $n_0 = 2$, car l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ n'est pas vraie pour $n = 2$. On ne peut pas non plus choisir $n_0 = 3$, car $P(3)$ est fausse... Le premier entier qui satisfait les deux hypothèses du théorème est donc $n_0 = 4$.

- Dans certains cas, il peut être nécessaire de regrouper dans l'hypothèse de récurrence plusieurs niveaux successifs de la proposition $P$ ;
- Par exemple $(P(n)$ et $P(n+1))$. Il faut alors démontrer que :
  1. $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies ;
  2. $\forall n \geq n_0$ $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ ; pour conclure que $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.
- On peut même regrouper dans l'hypothèse de récurrence tous les niveaux jusqu'à $n$ (récurrence forte). Il faut alors démontrer que :
  1. $P(n_0)$ est vraie;
  2. $\forall n \geq n_0 \quad (\forall p \in [\![n_0, n]\!] \; P(p)) \Rightarrow P(n+1)$;
     pour conclure que Vn > no, P(n) est vraie.





Soit $E$ un ensemble quelconque.

- On appelle suite d'éléments de $E$ une application de $\mathbb{N}$ (ou parfois d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $E$.
- L'image de l'entier $n$ est noté $u_n$.
- La suite tout entière est notée $(u_n)$ (ne pas oublier les parenthèses).



- Une suite peut être définie par son premier terme, par exemple $u_0$, et une relation donnant chaque terme en fonction du précédent : $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Le **théorème de récurrence** permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une suite vérifiant ces conditions ; on dit que la suite est définie par récurrence, ou que c'est une **suite récurrente**.



**Exemples :**

La somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

est définie par $S_0 = 0$ et pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. Par exemple $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

De même, le produit

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$$

est défini par $P_0 = 1$ et pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ : $P_{n+1} = P_n \times u_{n+1}$. Par exemple : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Dans cette partie on considère que $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On généralisera plus tard à d'autres ensembles dans lesquels on peut définir une addition et une multiplication.

- On appelle **suite arithmétique** une suite définie par son premier terme et la relation : $u_{n+1} = u_n + r$ ($r$ est appelé **raison** de la suite).
- On montre **par récurrence** que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n = u_0 + nr$.

Toujours par récurrence, on montre que la somme des termes d'une **suite arithmétique** finie est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$



- On appelle **suite géométrique** une suite définie par son premier terme et la relation : $u_{n+1} = u_n\, q$ ($q$ est appelé **raison** de la suite).
- On montre par récurrence que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n = u_0\, q^n$.

On peut calculer également la somme des termes d'une suite géométrique finie :

$$\begin{cases} \text{Si } q = 1 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = n\, u_1 \\ \text{Si } q \neq 1 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q} \end{cases}$$



# 2. Ensembles finis

## 2.1 Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$

- On conviendra de noter $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et $n$
- On a donc $[\![1, n]\!] = \{p \in \mathbb{N},\ ,\ 1 \leq p \leq n\}$.
- Par convention, on notera : $[\![1, 0]\!] = \varnothing$.

**Lemme**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe une bijection de $[\![1, n]\!] \setminus \{a\}$ dans $[\![1, n-1]\!]$.



**Démonstration :**

Si $n = 1$, $[\![1, n]\!] \setminus \{a\} = \varnothing = [\![1, n-1]\!]$

Or il existe une application unique de $\varnothing$ dans $\varnothing$, et celle-ci est bijective.

Si $n > 1$, l'application de $f$ de $[\![1, n]\!] \setminus \{a\}$ dans $[\![1, n-1]\!] \setminus \{a\}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{a\} \quad \begin{cases} \text{si } x < a, & f(x) = x \\ \text{si } x > a, & f(x) = x - 1 \end{cases}$$

est bien bijective.

### Théorème 2

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$

1. Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \iff p \leq n$
2. Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \iff p \geq n$
3. Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \iff p = n$
4. Si $n > 0$, toute injection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est bijective.
5. Toute surjection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est bijective.





- Un ensemble $E$ est dit fini, s'il existe un entier naturel $n$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $E$.
- On peut déduire du **Théorème 2** que cet entier $n$ est unique : on l'appelle **cardinal** de $E$ et on le note Card $E$.
- En particulier, Card $\varnothing = 0$.



**Exemples :**

1. $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ est bijective, donc $[\![1, n]\!]$ est fini et son cardinal est $n$.
2. Si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels tels que $m \leq n$, montrer que l'ensemble $[\![m, n]\!] = \{p \in \mathbb{N}, m \leq p \leq n\}$ est fini et trouver son cardinal.
3. Montrer que toute partie $I$ de $[\![1, n]\!]$ est finie, et que son cardinal est inférieur ou égal à $n$. (Si $I$ n'est pas vide, il a un plus petit élément que l'on peut appeler $f(1)$ ; continuer...)



Le **Théorème 2** s'étend aux ensembles finis :

### Corollaire

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis

1. Il existe une injection de $E$ dans $F \iff$ Card $E \leq$ Card $F$
2. Il existe une surjection de $E$ dans $F \iff$ Card $E \geq$ Card $F$
3. Il existe une bijection de $E$ dans $F \iff$ Card $E =$ Card $F$
4. Si Card $E =$ Card $F \neq 0$, toute injection de $E$ dans $F$ est bijective.
5. Si Card $E =$ Card $F$, toute surjection de $E$ dans $F$ est bijective.

## 3. Dénombrement

### 3.1 Partie d'un ensemble fini

Voyons concrètement comment calculer le cardinal d'un ensemble construit sur des ensembles finis donnés.

**Théorème 3**

Toute partie $A$ d'un ensemble fini $E$ est finie et $\text{Card}\, A \leq \text{Card}\, E$.

**Démonstration**

Soit $n = \text{Card}\, E$. Il existe une bijection $f$ de $[\![1, n]\!]$ dans $E$. La partie $A$ est l'image par cette bijection d'une partie $I$ de $[\![1, n]\!]$ qui est finie, de cardinal $p < n$ (cf exemples d'ensembles finis). Il existe donc une bijection de $I$ dans $A$, ce qui prouve que $A$ est finie et $\text{Card}\, A = \text{Card}\, I = p \leq n$.



### 3.2 Réunion disjointe

**Théorème 4**

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis disjoints ($E \cap F = \varnothing$), $E \cup F$ est fini et $\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\, E + \text{Card}\, F$.

**Démonstration**

Soit $n = \text{Card}\, E$ et $p = \text{Card}\, F$. Il existe une bijection $f$ de $E$ dans $[\![1, n]\!]$ et une bijection $g$ de $F$ dans $[\![n + 1, n + p]\!]$. Soit $h$ l'application de $E \cup F$ dans $[\![1, n + p]\!]$ qui, à tout élément $x$ de $E \cup F$. associe $f(x)$ si $x \in E$, et $g(x)$ si $x \in F$. $h$ est bijective, car $E \cap F = \varnothing$. Donc $E \cup F$ est fini et $\text{Card}\,(E \cup F) = n + p$.

**Remarque :** Si $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $\text{Card}\, \complement_E A = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A$



### 3.3 Réunion quelconque

**Théorème 5**

Quels que soient les ensembles finis $E$ et $F$, alors $E \cup F$ est fini et on a

$$\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\, E + \text{Card}\, F - \text{Card}\,(E \cap F)$$

**Démonstration**

On peut écrire $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ et $E \cap (F \setminus E) = \varnothing$, d'où $E \cup F$ est fini et $\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\,(E) + \text{Card}\,(F \setminus E)$. Par ailleurs, $F \setminus E = \complement_F E \cap F$ ; donc $\text{Card}\,(F \setminus E) = \text{Card}\, F - \text{Card}\,(E \cap F)$. En définitive, $\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}\, E + \text{Card}\, F - \text{Card}\,(E \cap F)$.

**Remarque :** En ajoutant $\text{Card}\, E$ et $\text{Card}\, F$, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$.



### 3.4 Produit cartésien

**Théorème 6**

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F$$

**Démonstration**

Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ et

$$E \times F = (\{e_1\} \times F) \cup (\{e_2\} \times F) \cup ... \cup (\{e_p\} \times F)$$

**Démonstration** (suite)

Il s'agit d'une réunion disjointe, donc $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card}\,(E \times F) = \sum_{i=1}^{p} \text{Card}\,(\{e_i\} \times F)$$

Chacun de ces ensembles est en bijection avec $F$, donc

$$\text{Card}\,(\{e_i\} \times F) = \text{Card}\,F$$

En définitive,

$$\text{Card}\,(E \times F) = p\,\text{Card}\,F = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F$$



- **Remarque :** Plus généralement, $\text{Card}\,(F^n) = (\text{Card}\,F)^n$. C'est le nombre de $n$-listes d'éléments de $F$. On utilise les $n$-listes dans tous les problèmes de choix successifs de $n$ éléments d'un ensemble, avec d'éventuelles répétitions.

- **Exemple :** Combien peut-on écrire de mots de trois lettres ? Il s'agit de 3-listes d'éléments de l'alphabet, qui possède 26 éléments ; d'où $26^3 = 17576$ mots distincts.



## 3.5 Applications

**Théorème 7**

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, alors $F^E$ est fini et :

$$\text{Card}\,(F^E) = (\text{Card}\,F)^{\text{Card}\,E}$$

**Démonstration**

Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$. L'application

$$\left|\begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^p \\ f & \longrightarrow & (f(e_1), ..., f(e_p)) \end{array}\right.$$

est bijective. Donc $F^E$ est fini et donc

$$\text{Card}\,(F^E) = \text{Card}\,(F^p) = (\text{Card}\,F)^p = (\text{Card}\,F)^{\text{Card}\,E}$$



## 3.6 Injections

**Théorème 8**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs :

$$\text{Card}\,E = p \quad \text{et} \quad \text{Card}\,F = n, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq p \leq n$$

Le nombre d'injections de $E$ dans $F$ est l'entier :

$$A_n^p = n\,(n-1)\,...\,(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

### Démonstration

Raisonnons par récurrence sur $p$ :

- pour $p = 0$, il existe une injection de $\varnothing$ dans $F$ : $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!}$
- soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal $p$ dans $F$ soit $A_n^p$. Soit $E$ un ensemble de cardinal $p+1$, et $a \in E$. Une injection $f$ de $E$ dans $F$ est caractérisée par :
  - la restriction injective de $f$ à $E \setminus \{a\}$ : $A_p^n$ possibilités
  - le choix de l'élément $f(a)$ qui ne doit pas appartenir à $f(E)$ : $(n-p)$ possibilités.



### Démonstration (suite)

Le nombre d'injections de $E$ dans $F$ est donc :

$$A_n^p(n-p) = \frac{n!}{(n-p)!}(n-p) = \frac{n!}{(n-p-1)!} = A_n^{p+1}$$

Par récurrence, le nombre d'injections de $E$ dans $F$ est donc bien $A_n^p$ pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$.

**Remarque :** Une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $F$ est appelée **arrangement** de $p$ éléments de $F$. C'est une $p$-liste d'éléments de $F$ distincts deux à deux.
On utilise les arrangements dans tous les problèmes de choix successifs de $p$ éléments parmi $n$, sans répétition.



- Lorsque nous choisissons $p$ objets parmi $n$ objets et que l'ordre dans lequel les objets sont sélectionnés revêt une importance, nous pouvons les représenter par un $p$-uplet d'éléments distincts et on en constitue une **liste ordonnée sans répétition possible**, c'est-à-dire dans laquelle l'ordre des éléments est pris en compte (si l'on permute deux éléments de la liste, on a une liste différente, et un élément ne peut être présent qu'une seule fois).



- Une telle liste ordonnée est appelée un **arrangement**. On note

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$$

- Cette formule peut se comprendre à l'aide d'un arbre des choix successifs, puisque le premier élément est choisi parmi $n$, le second parmi $(n-1)$... et le dernier parmi $(n-p+1)$.

Soit un ensemble de 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. Les arrangements sans répétition de 3 éléments choisis parmi les 4 éléments de $E$ sont :

$$\begin{array}{cccccc}
(a,b,c), & (a,c,b), & (b,a,c), & (b,c,a), & (c,a,b), & (c,b,a), \\
(a,b,d), & (a,d,b), & (b,a,d), & (b,d,a), & (d,a,b), & (d,b,a), \\
(a,c,d), & (a,d,c), & (c,a,d), & (c,d,a), & (d,a,c), & (d,c,a), \\
(b,c,d), & (b,d,c), & (c,b,d), & (c,d,b), & (d,b,c), & (d,c,b).
\end{array}$$

Il y en a $A_4^3 = 24$



**Théorème 9**

Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, le nombre de bijections de $E$ dans $E$ est $n!$.

**Démonstration**

Comme $E$ est fini, il est équivalent de dire qu'une application de $E$ dans $E$ est injective ou bijective ; le nombre de bijections de $E$ dans $E$ est donc $A_n^n = n!$.

**Remarque :** Une bijection de $E$ dans $E$ est appelée **permutation** des éléments de $E$. On utilise les permutations dans tous les problèmes de choix d'un ordre de tous les éléments d'un ensemble fini.



## 3.7 Parties d'un ensemble fini

**Théorème 10**

Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, dans ce cas Card $\mathcal{P}(E) = 2^n$.

**Démonstration**

Effectuons une récurrence sur $n$.

Pour $n = 0$, $E = \varnothing$ et $\mathcal{P}(E) = \varnothing$; Card $\mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout ensemble $E$ de cardinal $n$, Card $\mathcal{P}(E) = 2^n$.



**Démonstration** (suite)

Considérons un ensemble $F$ de cardinal $n+1$, et $a$ un élément fixé de $F$ . L'ensemble $E = F$ a pour cardinal $n$, il a donc $2^n$ parties.

- Les parties de $F$ ne contenant pas a sont exactement les parties de $E$ : il y en a $2^n$.
- Les parties de $F$ contenant a sont les réunions d'une partie de $E$ et du singleton : il y en a aussi $2^n$.

Le nombre total de parties de $F$ est donc $2 \times 2^n$, c'est-à-dire $2^{n+1}$. Par récurrence, tout ensemble de cardinal $n$ possède $2^n$ parties.

Plus précisément, étudions le nombre de parties de $E$ de cardinal fixé :

**Théorème 11**

Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$. Le nombre de parties de $E$ de cardinal $p$ $(0 \leq p \leq n)$ est l'entier :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$



**Démonstration**

- À une injection $f$ de $[\![1,p]\!]$ dans $E$ correspond une image $f([\![1,p]\!])$, qui est une partie de $E$ de cardinal $p$.
- Réciproquement, toute partie de $E$ de cardinal $p$ est l'image de $[\![1,p]\!]$ par $p!$ injections distinctes (correspondant aux permutations de $[\![1,p]\!]$)
- Le nombre de parties de cardinal $p$ est donc $\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

**Remarque :** Une partie de cardinal $p$ d'un ensemble E est appelée combinaison de $p$ éléments de $E$. On utilise les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de $p$ éléments distincts parmi $n$, sans considération d'ordre et sans répétition.



- Une combinaison $\binom{n}{p}$ correspond à un choix de $p$ objets parmi $n$ objets discernables (numérotés de 1 à $n$) et que l'ordre dans lequel les objets sont placés (ou énumérés) n'a **pas d'importance**, on peut les représenter par un ensemble à $p$ éléments.
- Soit $A$ l'ensemble de 5 éléments $A = \{a,b,c,d,e\}$. Les combinaisons de 3 éléments choisis parmi les 5 éléments de $A$ sont :
  - celles qui contiennent $a$ et deux autres éléments : $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\}$
  - celles qui contiennent trois éléments distincts de $a$ : $\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$,

  soit $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$



## 4. Coefficients binomiaux

### 4.1 Propriétés

1. Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux.
2. Ils peuvent être notés également $C_n^p$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$:
   - $\binom{n}{0} = 1$ (une seule partie vide)
   - $\binom{n}{n} = 1$ (une seule partie de même cardinal que l'ensemble)
   - $\binom{n}{1} = n$ ($n$ singleton)

On a également :

- **symétrie :** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (le complémentaire d'une partie de cardinal $p$ est une partie de cardinal $n-p$)
- **somme :** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$ (nombre total de parties)
- **Relation de Pascal :** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ $(n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n-1)$

**Démonstration :**

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $a$ un élément fixé de $E$. Les parties de $E$ de cardinal $p$ sont :

- les parties de $E \setminus \{a\}$ de cardinal $p$, et sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$
- les parties de $E \setminus \{a\}$ de cardinal $p-1$ auxquelles on ajoute $a$, et elles sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$



## 4.2 Triangle de Pascal

Les propriétés précédentes permettent de construire, de proche en proche, la table des coefficients binomiaux, appelée **triangle de Pascal**.

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$



# 5. Formule du binôme

**Théorème 11**

Soit a et b deux réels (ou deux complexes) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

**Démonstration**

Par récurrence sur $n$ on a d'abord $(a+b)^0 = 1$ pour $n = 0$. Puis, en supposant la formule du binôme vraie, on montre que (laissé en exercice)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \, b^{n+1-k}$$



# 5. Exercices

## 5.1 Vrai ou faux ?

1. Une proposition $P$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Il n'existe aucune injection d'un ensemble de cardinal 200 dans un ensemble de cardinal 100.
3. Toute application d'un ensemble de cardinal 100 dans un ensemble de cardinal 200 est injective.
4. Toute injection d'un ensemble dans lui-même est bijective.
5. Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis est la somme de leurs cardinaux.
6. Le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis est le produit de leurs cardinaux.
7. $A_n^p$ est le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal $n$.
8. $\binom{n}{p}$ est le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal $n$ dans un ensemble de cardinal $p$.
9. La somme des termes de la ne ligne du triangle de Pascal est $2^n$.
10. $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-2)^p = (-1)^n$

a) Faux, il faut supposer que $P(0)$ est vraie. **b)** Vrai. **c)** Faux. **d)** Faux ; c'est vrai si l'ensemble est fini. **e)** Faux ; il faut que les deux ensembles soient disjoints. **f)** Vrai. **g)** Vrai. **h)** Faux. **i)** Vrai. **j)** Vrai ; formule du binôme avec $a = 1$, $b = -2$.



# 5. Exercices

## 5.2 Dénombrement

1. Combien peut-on écrire d'anagrammes des mots : MATHS ; MOTO ; DODO ; ANAGRAMME ?
2. Quelle est la probabilité que, clans votre classe, deux élèves au moins aient leur anniversaire le même jour ? À partir de quel effectif cette probabilité est-elle supérieure à 50 % ? à 90 % ?
3. Une classe comporte 30 élèves. De combien de façons peut-on constituer des trinômes de colle ? Plus généralement, combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal $np$ en $n$ parties de cardinal $p$ ?
4. Démontrer, de plusieurs façons, que tout ensemble fini non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
5. Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$.
   1. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
   2. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = 0$.
   3. Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.



MATHS : $5!$ ; MOTO (2 O) : $\dfrac{4!}{2!} = 12$ ;
DODO (2 D, 2 O) : $\dfrac{4!}{2!^2} = 6$ ;
ANAGRAMME (2 M, 3 A) : $\dfrac{9!}{2!3!} = 30\,240$.

(Pour simplifier, on suppose que personne n'est né un 29 février.)
On cherche les applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 365]\!]$ qui ne sont pas injectives :

$$p = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

Cette probabilité est supérieure à $\dfrac{1}{2}$ à partir de 23 personnes, et supérieure à $\dfrac{9}{10}$ à partir de 41 personnes. Qu'en est-il dans votre classe ?



(Pour simplifier, on suppose que personne n'est né un 29 février.)
On cherche les applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 365]\!]$ qui ne sont pas injectives :

$$p = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

Cette probabilité est supérieure à $\dfrac{1}{2}$ à partir de 23 personnes, et supérieure à $\dfrac{9}{10}$ à partir de 41 personnes. Qu'en est-il dans votre classe ?

Deux méthodes

**1)** Spécifier un résultat précis :

• choix d'un trinôme : $\binom{30}{3} = \dfrac{30!}{27!3!}$ ;

• choix successifs de dix trinômes dans un certain ordre :

$$\frac{30!}{27!3!} \times \frac{27!}{24!3!} \times \cdots \times \frac{6!}{3!3!}$$

• on divise par 10! pour supprimer l'ordre des trinômes. Simplifier le résultat.



**2)** Compter plusieurs fois chaque résultat, et corriger :

On peut constituer les trinômes à partir d'une liste des élèves dans un ordre quelconque, en groupant les trois premiers, les trois suivants, etc. Il y a 30! listes possibles.

Combien de listes distinctes donneront les mêmes trinômes ?

On obtient finalement :

$$\frac{30!}{(3!)^{10}\,10!} = 1\,208\,883\,745\,669\,600\,000$$

façons de constituer des trinômes. Admirez votre $Z$ qui a su trouver la meilleure solution parmi plus d'un milliard de milliards de possibilités...

Généralisation : $\dfrac{(np)!}{(p!)^n\,n!}$.



On peut, par exemple :

**1)** Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ et interpréter.

**2)** Montrer par récurrence que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$ est $2^{n-1}$.

**3)** Construire une bijection entre l'ensemble des parties de cardinal pair et l'ensemble des parties de cardinal impair ; par exemple : si la partie $A$ contient l'élément $a$, on lui associe $A\backslash\{a\}$ ; si elle ne contient pas $a$ ,...



# 5. Exercices

## 5.3 Ensembles finis

1. Soit $E$ un ensemble fini et $A$ une partie de $E$. Démontrer que, s'il existe une bijection de $A$ dans $E$, alors $A = E$.
2. $E, F, G$ étant trois ensembles finis, exprimer : Card $(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles $E, F, G, E \cap F, F \cap G, E \cap G$ et $E \cap F \cap G$.
3. Le service de surveillance d'une centrale nucléaire dispose de $n$ agents ; il y a en permanence une équipe de trois agents en service. Déterminer la valeur maximale de $n$ pour que l'on puisse repérer une équipe quelconque par une suite de deux lettres, par exemple ZX, TT ou XZ...

Si Card $A$ = Card $E$, Card $\complement_E A = 0$, donc

$$\complement_E A = \varnothing.$$

Le résultat est faux pour un ensemble infini ; il existe, par exemple, des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ ; en construire une.

$$\begin{aligned}\text{Card } (E \cup F \cup G) = \text{Card } E + \text{Card } F + \text{Card } G \\ -\text{Card } (E \cap F) - \text{Card } (F \cap G) \\ -\text{Card } (G \cap E) + \text{Card } (E \cap F \cap G)\end{aligned}$$

Il faut que $\binom{n}{3} \leqslant 26^2$, soit $n \leqslant 16$.



# 5. Exercices

## 5.4 Récurrence

1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ alors $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
2. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ alors $(n+1)! \leq \sum_{k=1}^{n} k!$.
3. Montrer que :
   1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
   2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n+2} - 2^{6n+1}$ est divisible par 11.
   3. $\forall n \geq 2 \quad 2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.
   4. la somme de trois entier consécutifs est divisible par 9.
4. La suite de Fibonacci est définie par : $u_0 = 1$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   1. Calculer les dix premiers termes de cette suite.
   2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq (\frac{5}{3})^n$



Récurrence immédiate ; ne pas oublier de vérifier la propriété pour $n = 1$.

Idem.

Récurrences.

**1)** Poser $3^{2n} - 2^n = 7k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
**2)** Poser $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
**3)** Poser $2^{2^n} - 6 = 10k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
**4)** Écrire :

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + \cdots$$

**2)** C'est une récurrence sur deux niveaux : vérifier l'inégalité pour $n = 0$ et $n = 1$, puis montrer que les inégalités aux rangs $n$ et $n + 1$ entraînent l'inégalité au rang $n + 2$.