PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

Espace probabilisé

Une expérience aléatoire conduit à un résultat incertain $\omega \in \Omega$. L'ensemble Ω est supposé fini: $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.

1 Définitions

1.1 Univers et évènements

- L'ensemble Ω est «l'univers des possibles».
- Un «évènement» A est un sous ensemble de Ω. Attribuer une probabilité à cet évènement consiste à donner une valeur numérique à la probabilité que le résultat de l'expérience soit dans A.
- Un «évènement élémentaire» est un évènement ne contenant qu'un seul élément. On dit aussi que c'est un «singleton».
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω. C'est donc l'ensemble de tous les évènements.
- Des évènements $(A_1, \cdots, A_p)$ sont «disjoints deux à deux» si, pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Ils forment une «partition» de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et si leur union est Ω:

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{p} A_i$$

  Dans ce cas là, tout élément $\omega \in \Omega$ est dans un et un seul des A_i.

1.2 Fonction de probabilité

Étant donné un ensemble Ω fini, une probabilité est une fonction

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

qui vérifie:

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout couple d'évènements **disjoints** $(A, B) \in \left[\mathscr{P}(\Omega)\right]^2$,

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$$

Le triplet $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ est un «espace probabilisé».

2 Propriétés

Considérons un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ et un couple d'évènements $(A, B) \in \left[\mathscr{P}(A)\right]^2$. Alors

- $P(\emptyset) = 0$
- La fonction P est entièrement déterminée par ses n valeurs $P\big(\{\omega_1\}\big), \cdots, P\big(\{\omega_n\}\big)$
- $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
- $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Un cas particulier fréquent est celui où les évènements élémentaires sont équiprobables. Dans ce cas, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(A)$,

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Définitions

1.1 Probabilité conditionnelle

Étant donnés deux évènements $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(B) \neq 0$, la «probabilité conditionnelle de A sachant B» est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.2 Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dans ce cas,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } P(B) \neq 0,\ P(A|B) = P(A) \\ \text{Si } P(A) \neq 0,\ P(B|A) = P(B) \end{array} \right.$$

1.3 Méthodes de calcul

Soient A et B deux évènements, et $(A_1, \cdots, A_n)$ une famille de n évènements. Les formules qui suivent sont vraies à condition que les probabilités conditionnelles soient bien définies.

- Intersection de deux évènements:

$$P(A \cap B) = \left| \begin{array}{ll} P(A|B)P(B) & \\ P(B|A)P(A) & \\ P(A)P(B) & \text{si les évènements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \end{array} \right.$$

- Intersection de n évènements:

$$\begin{aligned} P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots A_1) = \ & P(A_n|A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1 \\ & \times P(A_{n-1}|A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1) \\ & \vdots \\ & \times P(A_2|A_1) \\ & \times P(A_1) \end{aligned}$$

- Formule de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

2 Application de la formule de Bayes dans le cas d'une partition de Ω

Si les évènement $B_1, \cdots, B_n$ forment une partition de Ω et si, pour un évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, les valeurs $P(B_i)$ et $P(A|B_i)$ sont connues pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

VARIABLES ALÉATOIRES

$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Distribution d'une variable aléatoire

1.1 Définition

Une variable aléatoire X est une fonction

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

On peut alors définir $X(\Omega)$, qui est l'ensemble des valeurs possibles prises par X, et la loi de probabilité

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B) \end{aligned}$$

Le triplet $\Big(X(\Omega), \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big), P_X\Big)$ est un espace probabilisé.

1.2 Distribution de X

La distribution de la variable aléatoire X est donnée par

1. l'ensemble $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,
2. les valeurs $P(X=x_1),\ P(X=x_2),\ \cdots,\ P(X=x_n)$

On peut aussi la définir par la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

2 Espérance et variance d'une variable aléatoire X

2.1 Définition

L'espérance de X est

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X=x_i)$$

La variance et l'écart type de X sont

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - \mathrm{E}(X)\big)^2\, P(X=x_i) \\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \end{aligned}$$

2.2 Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a

1. $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$
2. $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
3. $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, P(X=x_i)$
4. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$
5. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
6. Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

3 Exemples de distributions

3.1 Distribution de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. La variable X suit une distribution de Bernoulli de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{ll} P(X{=}1) & = p \\ P(X{=}0) & = 1-p \end{array} \right.$$

Son espérance et sa variance sont

$$\mathrm{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

On note: $X \rightsquigarrow \mathrm{Bernoulli}(p)$.

3.2 Distribution binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X_1, \cdots, X_n$, n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Posons

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \text{nombre de } X_i \text{ qui valent } 1$$

Alors Y suit une loi binomiale de paramètres n et p. On note: $Y \rightsquigarrow \mathrm{B}(n,p)$.

On a alors

$$\left| \begin{array}{l} Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ \forall k \in [\![0,n]\!], P(Y{=}k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{ll} \mathrm{E}(Y) & = np \\ \mathrm{Var}(Y) & = np(1-p) \end{array} \right.$$