

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de variable aléatoire sur un univers fini Ω , vue en première année, au cas où l'univers Ω n'est pas nécessairement fini, comme dans le chapitre « Espaces probabilisés ».

1 Généralités

1.1 Définitions

1.1.1 Définitions - Variable aléatoire discrète.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

- Une **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application X définie sur Ω telle que :
 - a. L'image $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est finie ou dénombrable,
 - b. $\forall x \in X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{T}$.
- Si de plus $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, alors on dit que X est une variable aléatoire discrète réelle.

1.1.2 Remarques. 1. Pour simplifier, on note $\{X = x\}$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

Et pour tout $U \subset X(\Omega)$, on note $\{X \in U\}$ l'ensemble $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in U\}$. On a $\{X \in U\} \in \mathcal{T}$, puisque $\{X \in U\}$ est l'union finie ou dénombrable des $\{X = x\}$ pour $x \in U$.

2. Si Ω est fini ou dénombrable, alors toute application définie sur Ω est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

1.1.3 Exemples. 1. Soit $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ l'univers associé à un lancer de deux dés à 6 faces.

Alors l'application $S : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$, qui donne la somme des deux dés, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

On a $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$, et par exemple $\{S = 4\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

2. Soit $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$ l'univers associé à une suite (infinie) de lancers d'un dé à 6 faces.

Alors l'application $R : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, qui donne le rang d'apparition du premier 6, ou 0 si le 6 n'apparaît pas, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à condition que la tribu $\mathcal{T}$ contienne toutes les parties $\{R = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On a $R(\Omega) = \mathbb{N}$, et par exemple $\{R = 0\} = \llbracket 1; 5 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$.

1.1.4 Définition - Loi d'une variable aléatoire discrète.

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, d'image $\Omega' = X(\Omega)$.

- On appelle **loi** de X (relative à P) la loi de probabilité P_X sur l'espace probabilisable $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'))$ définie, pour tout $U \subset \Omega'$, par $P_X(U) = P(\{X \in U\})$.
- On dit alors que X **suit** la loi P_X .

Démonstration (du fait que P_X est bien une loi de probabilité).

Pour tout $U \subset \Omega'$, on a par σ -additivité, $P(\{X \in U\}) = \sum_{x \in U} P(\{X = x\})$ (somme finie ou somme de série convergente). En particulier, les $P(\{X = x\})$, pour $x \in \Omega'$, forment une famille de réels positifs et de somme $\sum_{x \in \Omega'} P(\{X = x\}) = P(\{X \in \Omega'\}) = P(\Omega) = 1$.

1.1.5 Remarques. 1. Pour simplifier, on omet les accolades et on note $P(X \in U)$ et $P(X = x)$ les probabilités $P(\{X \in U\})$ et $P(\{X = x\})$ respectivement.

2. En pratique, déterminer la loi d'une variable aléatoire X , c'est déterminer son image $X(\Omega)$ et les probabilités $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
3. Réciproquement, on admettra que si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et si $(p_x)_{x \in X(\Omega)}$ est une famille de réels positifs de somme 1, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $p_x = P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

1.1.6 Exemples. On reprend les exemples de 1.1.3, en supposant les dés équilibrés.

1. Loi de S est définie par $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$, et par les valeurs $p_k = P(S = k)$ suivantes :

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}, p_3 = p_{11} = \frac{1}{18}, p_4 = p_{10} = \frac{1}{12}, p_5 = p_9 = \frac{1}{9}, p_6 = p_8 = \frac{5}{36} \text{ et } p_7 = \frac{1}{6}.$$

En particulier $P(S \text{ est pair}) = \frac{1}{2}$.

2. En négligeant l'événement négligeable $\{R = 0\}$, la variable aléatoire R suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, i.e. $R(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(R = n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

1.2 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

1.2.1 Définitions - *Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle.*

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans une partie dénombrable $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, où $\varphi : n \mapsto x_n$ est une bijection.

- On dit que X **admet une espérance**, ou est **d'espérance finie**, si la série numérique $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

Si c'est le cas, on appelle **espérance** de X , et on note $E(X)$, la somme de cette série :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n).$$

- On dit que X est **centrée** si elle admet une espérance et si $E(X) = 0$.

1.2.2 Remarques. 1. On admettra que la convergence absolue de la série, et le cas échéant sa somme, ne dépendent pas du choix de l'énumération $\varphi : n \mapsto x_n$.

2. En cas d'existence, l'espérance d'une variable aléatoire discrète réelle X est la moyenne des valeurs prises par X , pondérées par leur probabilité d'apparition.

3. Si X est d'image finie, ce qui est toujours le cas si Ω est fini (cadre du cours de 1ère année), alors X admet nécessairement une espérance, et $E(X)$ est une somme finie.

Plus spécifiquement si $X(\Omega) \subset \{x_1, \dots, x_p\}$, alors les $P(X = x_n)$ sont nuls à partir du rang $p + 1$, donc la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est évidemment absolument convergente, et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^p x_n P(X = x_n).$$

En particulier si X est constante égale à $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $E(X) = \lambda$.

4. Si Ω est fini, alors $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$ (cf. théorème de transfert, 1ère année).

Cette formule est encore valable lorsque Ω est dénombrable (admis), la somme étant alors la somme d'une série absolument convergente. En revanche, cette formule n'a plus de sens a priori lorsque Ω est infini non dénombrable.

1.2.3 Exemples. On reprend les exemples de 1.1.3, en supposant les dés équilibrés.

1. La variable aléatoire S admet une espérance, puisque $S(\Omega)$ est fini, et :

$$E(S) = \frac{2+12}{36} + \frac{3+11}{18} + \frac{4+10}{12} + \frac{5+9}{9} + \frac{(6+8) \times 5}{36} + \frac{7}{6} = 7.$$

2. La variable aléatoire R admet une espérance, puisque la série $\frac{1}{6} \sum n(\frac{5}{6})^{n-1}$ converge, et :

$$E(R) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6.$$

1.2.4 Proposition - Propriétés de l'espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles d'espérance finie sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. *Linéarité.* Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X + Y$ est d'espérance finie et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
2. a. *Positivité.* Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
b. *Croissance.* Si $X \geq Y$, alors $E(X) \geq E(Y)$.
3. *Inégalité de Markov.* Si $X \geq 0$, alors $\forall a > 0$, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Démonstration (linéarité non exigible).

1. Voir le cours de 1ère année pour le cas où Ω est fini, et en annexe pour le cas général.
2. Montrons 2a. Si X est à valeurs positives, alors on peut considérer que tous les x_n sont positifs dans les notations de 1.2.1, d'où $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \geq 0$.
Le point 2b s'en déduit par linéarité.
3. Comme en 2a et puisque les x_n sont positifs, on a les minoration suivantes :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \geq \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq a}}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \geq a \sum_{\substack{n=0 \\ x_n \geq a}}^{+\infty} P(X = x_n) = a P(X \geq a).$$

1.2.5 Exemples. Lors d'un lancer de deux des à 6 faces équilibrés, si l'on note respectivement X et Y le maximum et le minimum obtenus, alors :

1. On a $1 \leq Y \leq X \leq 6$, donc $1 \leq E(Y) \leq E(X) \leq 6$ par croissance de l'espérance,
2. La somme S des deux dés est $S = X + Y$, donc $E(X) + E(Y) = E(S) = 7$ par linéarité.

Rq. On a précisément $E(X) = \frac{161}{36}$ et $E(Y) = \frac{91}{36}$ (cf. 1.4.5 ci-dessous).

1.2.6 Théorème - Théorème de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, où $\varphi : n \mapsto x_n$ est une bijection, et soit f une application à valeurs réelles définie sur $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On note par abus $f(X)$ la composée $f \circ X$. Alors :

1. L'application $f(X)$ est une variable aléatoire discrète réelle.
2. **Théorème de transfert.** La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série numérique $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ converge absolument, auquel cas

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n).$$

Démonstration.

1. L'application $f \circ X$ est à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, et pour tout $y \in f(X(\Omega))$, $\{f(X) = y\} = \{X \in f^{-1}(\{y\})\} \in \mathcal{F}$ (cf. 1.1.2).
2. Voir le cours de 1ère année pour le cas où Ω est fini. Admis dans le cas général.

- 1.2.7 Remarques.**
1. Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète $f(X)$ à partir de la loi de X , sans avoir à déterminer celle de $f(X)$.
 2. Si X est d'image finie, alors $f(X)$ l'est aussi, donc admet nécessairement une espérance.

1.2.8 Exemples. Avec les exemples de 1.1.3 :

1. La variable aléatoire S^2 est d'espérance finie et $E(S^2) = \frac{4+144}{36} + \frac{9+121}{36} + \dots + \frac{49}{6} = \frac{329}{6}$.
2. La variable aléatoire R^2 est d'espérance finie et $E(R^2) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+\frac{5}{6}}{(1-\frac{5}{6})^3} = 66$.

1.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète réelle

1.3.1 Définitions - Variance et écart-type d'une v.a.d. réelle.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

- On dit que X **admet une variance**, ou **est de variance finie**, si X^2 est d'espérance finie.
- Si c'est le cas, alors X est d'espérance finie, la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ l'est aussi, et on appelle **variance** de X le réel positif

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

et on appelle **écart-type** de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Démonstration (des affirmations du second point).

- Montrons que si X^2 est d'espérance finie, alors X et $(X - m)^2$, où $m \in \mathbb{R}$, le sont. Posons $X(\Omega) \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, où $\varphi : n \rightarrow x_n$ est une bijection, et $p_n = P(X = x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse sur X^2 implique, par théorème de transfert, la convergence de la série $\sum x_n^2 p_n$. Et il s'agit alors de montrer que les séries $\sum |x_n| p_n$ et $\sum (x_n - m)^2 p_n$ convergent.
 - ★ La convergence de la première résulte de l'inégalité $|x_n| \leq 1 + x_n^2$ (distinguer les cas $|x_n| \leq 1$ et $|x_n| > 1$, auquel cas $|x_n| \leq x_n^2$), et de la convergence des séries $\sum p_n$ et $\sum x_n^2 p_n$.
 - ★ La convergence de la seconde résulte de l'inégalité $(x_n - m)^2 \leq x_n^2 + 2|m x_n| + m^2$, et de la convergence des séries $\sum p_n$, $\sum |x_n| p_n$ et $\sum x_n^2 p_n$.
- De plus par linéarité de l'espérance, $E((X - m)^2) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2$, qui se simplifie en $E(X^2) - E(X)^2$ si $m = E(X)$.

1.3.2 Remarques. 1. La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X mesurent la *dispersion* des valeurs prises par X par rapport à leur moyenne $E(X)$.

En particulier, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnée en 1.3.4 ci-dessous quantifie le fait qu'il est peu probable que X prenne des valeurs éloignées de leur moyenne $E(X)$.

2. Si X est d'image finie, ce qui est toujours le cas si Ω est fini (cadre du cours de 1ère année), alors X admet nécessairement une variance, et $V(X)$ est une somme finie.

1.3.3 Exemples. Avec les exemples de 1.1.3 :

1. La variable aléatoire S est de variance finie, et $V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$.
2. La variable aléatoire R est de variance finie, et $V(R) = E(R^2) - E(R)^2 = 66 - 36 = 30$.

1.3.4 Proposition - Propriétés de la variance.

Soit X une variable aléatoire discrète de variance finie.

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ est de variance finie, et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
2. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.* Pour tout $a > 0$, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.
3. On a $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante (égale à $E(X)$).

Démonstration.

1. Par linéarité, on a $E(aX + b) = aE(X) + b$, donc $aX + b - E(aX + b) = a(X - E(X))$. Donc $aX + b$ admet une variance et que $V(aX + b) = E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 V(X)$.
2. Cette inégalité est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et au réel a^2 , en remarquant que $\{|X - E(X)| \geq a\} = \{(X - E(X))^2 \geq a^2\}$.
3. Si $V(X) = 0$, alors on déduit de 2 que $P(|X - E(X)| > 0) = 0$, donc par passage au complémentaire, $P(X = E(X)) = 1$. Réciproquement, s'il existe $m \in X(\Omega)$ tel que $P(X = m) = 1$, alors $E(X) = m$ et $E(X^2) = m^2$ (par théorème de transfert), et donc $V(X) = 0$.

1.3.5 Exemples. Avec les exemples de 1.1.3 :

- On a $P(|S - 7| \geq 5) = \frac{1}{18} \leq \frac{V(S)}{25} = \frac{7}{30}$.
- On a $P(|R - 6| \geq 6) = P(R \geq 12) = \frac{1}{6} \sum_{n=12}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \leq \frac{V(R)}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

1.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète réelle

1.4.1 Définition - Fonction de répartition d'une v.a.d. réelle.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

1.4.2 Exemple. Si X est d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$, où $\forall i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, x_i < x_{i+1}$, alors F_X est nulle sur $] -\infty; x_1[$, constante sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}[$, égale à 1 sur $[x_p; +\infty[$, et les "sauts" entre les différents paliers sont les probabilités $P(X = x_i)$, pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

1.4.3 Proposition - Propriétés de la fonction de répartition.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

1. La fonction de répartition F_X de X est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
2. Pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, on a $P(X > x) = 1 - F_X(x)$, $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$, et

$$P(X = y) = F_X(y) - \lim_{x \rightarrow y^-} F_X(x).$$

En particulier, la fonction de répartition de X détermine la loi de X .

3. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X admet une espérance ssi la série $\sum P(X > n)$ converge, auquel cas :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, alors $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ et donc par croissance des probabilités, $F_X(x) \leq F_X(y)$, donc F_X est croissante. De plus par continuité (dé)croissante des probabilités :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq n\}\right) = P(\Omega) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq -n\}\right) = P(\emptyset) = 0.$$

2. On a $\{X > x\} = \overline{\{X \leq x\}}$ et $\{x < X \leq y\} = \{X \leq y\} \setminus \{X \leq x\}$, d'où les deux premières égalités en passant aux probabilités. La troisième se déduit de la seconde par continuité décroissante, en remarquant que $\{X = y\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{y - \frac{1}{n} < X \leq y\}$.

3. Posons $u_n = P(X = n)$ et $R_n = P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (reste de la série convergente $\sum u_n$).

Il s'agit de montrer que les séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature, et ont même somme en cas de convergence. Cela résulte de l'identité suivante (facile à vérifier au vu des définitions) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^n ku_k + nR_n \quad (*)$$

- Si $\sum nu_n$ converge, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq nR_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$ donc $nR_n \rightarrow 0$ par encadrement. Ainsi par (*), $\sum R_n$ converge et en passant à la limite, $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=0}^{+\infty} ku_k$.
- Si $\sum R_n$ converge, alors par (*), les sommes partielles de la série $\sum nu_n$ sont majorées, donc cette série converge puisqu'elle est à termes positifs, ce qui ramène au point précédent.

1.4.4 Remarque. Dans certains cas, les probabilités $P(X \leq x)$ ou $P(X \geq x)$ sont plus faciles à calculer que les probabilités $P(X = x)$. D'où l'intérêt de la fonction de répartition, et de la formule donnant l'espérance de 1.4.3, dans ces cas-là.

1.4.5 Exemples. On reprend les exemples de 1.2.3 et 1.2.5.

1. Si X et Y désignent le maximum et le minimum obtenus en lançant deux dés, alors :

$$\bullet \forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}, \text{ d'où } E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=0}^5 (1 - \frac{n^2}{36}) = 6 - \frac{5 \times 6 \times 11}{36 \times 6} = \frac{161}{36}.$$

$$\bullet \forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, P(Y \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}, \text{ d'où } E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y \geq n) = \sum_{n=1}^6 \frac{(7-n)^2}{36} = \frac{6 \times 7 \times 13}{36 \times 6} = \frac{91}{36}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(R > n) = (\frac{5}{6})^n$, d'où $E(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(R > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{5}{6})^n = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6$.

1.5 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

1.5.1 Définition - Fonction génératrice d'une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **série génératrice** de X la série entière $\sum P(X = n)z^n$, et **fonction génératrice** de X sa somme, i.e. la fonction G_X définie (au moins sur l'intervalle ouvert de convergence) par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

1.5.2 Remarque. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'image finie ssi sa fonction génératrice est polynomiale.

1.5.3 Exemple. Pour la variable R de 1.1.3, on a $G_R(t) = \frac{t}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{t}{6-5t}$.

1.5.4 Proposition - Propriétés de la fonction génératrice.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Le rayon de convergence de la série génératrice de X est supérieur ou égal à 1, et $G_X(1) = 1$. En particulier, la fonction génératrice de X détermine la loi de X .

2. **Espérance et variance par la fonction génératrice.**

- X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G'_X(1)$.
- X est de variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1, auquel cas (formule à savoir retrouver si besoin) $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Démonstration (non exigible pour l'espérance et la variance).

Notons R le rayon de convergence de la série génératrice, et posons $p_n = P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ pour tout $t \in]-R; R[$.

1. On a $R \geq 1$ car la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Le reste s'en déduit puisqu'alors G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R; R[$, et $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

2. Voir en annexe pour le cas général ($R \geq 1$). Traitons le cas $R > 1$.

On a $\forall t \in] - R; R[$, $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n t^{n-1}$ et $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) p_n t^{n-2}$. En particulier si $R > 1$, alors G_X est deux fois dérivable en 1 et $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n$ et $G''_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) p_n$.

Cela montre que X est d'espérance et de variance finies (car les séries $\sum n p_n$ et $\sum n^2 p_n$ convergent), et que $G'_X(1) = E(X)$ et $G''_X(1) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = V(X) + E(X)^2 - E(X)$.

1.5.5 Exemple. La variable aléatoire R de 1.1.3 est de variance finie, puisque le rayon de convergence de sa série génératrice est $\frac{6}{5}$, et $E(R) = G'_R(1) = 6$ et $V(R) = \dots = 30$.

cf fin

2 Fonction génératrice, espérance et variance des lois usuelles

2.1 Lois finies (rappels)

2.1.1 Proposition - Cas d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$, où $a, b \in \mathbb{N}$ sont tels que $a < b$. On pose $n = \text{Card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1$.

1. **Loi** : $X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$.
2. **Fonction génératrice** : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=a}^b t^k$.
3. **Espérance et Variance** : $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Démonstration.

1. C'est la définition de la loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$.
2. Résulte immédiatement de la loi.
3. Voir le cours de 1ère année, ou utiliser les expressions de $E(X)$ et $V(X)$ via G_X vues en 1.5.4.

2.1.2 Rappel. La loi uniforme modélise le résultat d'un tirage *au hasard* dans un ensemble fini (urne, jeu de cartes), ou d'un lancer de dé ou d'une pièce *non truquée*, ou *équilibrée*.

2.1.3 Proposition - Cas d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0; 1]$. On pose $q = 1 - p$.

1. **Loi** : $X(\Omega) = \llbracket 0; 1 \rrbracket$ et $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q$.
2. **Fonction génératrice** : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = q + pt$.
3. **Espérance et Variance** : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

Démonstration.

1. C'est la définition de la loi de Bernoulli de paramètre p .
2. Résulte immédiatement de la loi.
3. Voir le cours de 1ère année, ou utiliser les expressions de $E(X)$ et $V(X)$ via G_X vues en 1.5.4.

2.1.4 Rappel. La loi de Bernoulli modélise le résultat (succès/échec) d'une expérience dont la probabilité de succès (encodé par 1) est p , et celle de l'échec (encodé par 0) est donc $1 - p$.

2.1.5 Proposition - Cas d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. On pose $q = 1 - p$.

1. **Loi** : $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
2. **Fonction génératrice** : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (q + pt)^n$.
3. **Espérance et Variance** : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Démonstration.

1. C'est la définition de la loi binomiale de paramètres n et p .
2. Résulte immédiatement de la loi, via la formule du binôme.
3. Voir le cours de 1ère année, ou utiliser les expressions de $E(X)$ et $V(X)$ via G_X vues en 1.5.4.

2.1.6 Rappel. La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n expériences indépendantes les unes des autres, et dont la probabilité de succès est p .

2.2 Lois dénombrables

2.2.1 Proposition - Cas d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0; 1]$. On pose $q = 1 - p$.

1. **Loi :** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = q^{n-1}p$.
2. **Fonction génératrice :** $\forall t \in]-\frac{1}{q}; \frac{1}{q}[$, $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$.
3. **Espérance et Variance :** la variable X est de variance et (donc) d'espérance finie, et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration.

1. C'est la définition de la loi géométrique de paramètre p .
2. Résulte de la loi et des résultats connus pour les séries géométriques.
3. • *Méthode 1 (définition).* Comme $q \in [0; 1[$, les séries $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} n^2q^{n-1}$ convergent et ont respectivement pour somme $\frac{1}{(1-q)^2}$ et $\frac{1+q}{(1-q)^3}$ (voir le cours sur les séries numériques ou sur les séries entières). Ainsi X admet une espérance et une variance, et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{p(1+q)}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$
 • *Méthode 2 (fonction génératrice).* Vu 2, G_X est deux fois dérivable sur $]-\frac{1}{q}; \frac{1}{q}[$ et $\forall t \in]-\frac{1}{q}; \frac{1}{q}[$,

$$G'_X(t) = \frac{p(1-qt)+ptq}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2} \quad \text{et} \quad G''_X(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$
 En particulier (cas $t = 1 < \frac{1}{q}$), X admet une espérance et une variance, et $E(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.
 • *Méthode 3 pour l'espérance (1.4.3).* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X > n) = q^n$, donc la série $\sum P(X > n)$ converge (car $q \in [0; 1[$), i.e. X admet une espérance, et $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.

2.2.2 Rappel. La loi géométrique modélise le rang d'apparition du premier succès lors d'une suite d'expériences indépendantes les unes des autres, et dont la probabilité de succès est p .

2.2.3 Proposition - Cas d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. **Loi :** $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.
2. **Fonction génératrice :** $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
3. **Espérance et Variance :** la variable X est de variance et (donc) d'espérance finie, et

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

Démonstration.

1. C'est la définition de la loi de Poisson de paramètre λ .
2. Résulte de la loi et des résultats connus pour les séries exponentielles.
3. • *Méthode 1 (définition).* Les séries $\sum_{n \geq 0} n \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ et $\sum_{n \geq 0} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} = \lambda^2 \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ sont convergentes et ont respectivement pour somme λe^λ et $\lambda^2 e^\lambda$. Ainsi X admet une espérance et une variance, et

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$
 • *Méthode 2 (fonction génératrice).* Vu 2, G_X est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ et $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$. En particulier (cas $t = 1$), X admet une espérance et une variance, et $E(X) = G'_X(1) = \lambda$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

2.2.4 Rappel. La loi de Poisson modélise le nombre d'événements (pannes, achats, trouvailles) qui se produisent dans un intervalle de temps donné.