

Chapitre 2 : Extrema

Table des matières

1	Elements de topologie	3
1.1	Boule de $\mathbb{R}^n$	3
1.1.1	Définitions	3
1.1.2	Exemples	3
1.2	Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$	3
1.2.1	Définitions	3
1.2.2	Exemples	3
1.2.3	Théorèmes	3
1.2.4	Exemples importants car très utiles	3
1.2.5	Ensembles bornés	4
2	Extréma (ou extrémums)	4
2.1	Définition	4
2.2	Le cas des fonctions numériques (définies sur $\mathbb{R}$)	4
2.3	Généralisation	6
2.3.1	Cas particulier important	6
2.3.2	Condition nécessaire	6
2.3.3	Point selle	7
2.3.4	Condition suffisante	7
3	Méthode pour déterminer les extrema éventuels d'une fonction	8
3.1	Une méthode en deux étapes	8
3.1.1	Recherche des points critiques	8
3.1.2	Examen des points critiques	8
3.2	Exemples	8
3.2.1	Exemple 1	8
3.2.2	Exemple 2	10

1 Elements de topologie

1.1 Boule de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Définitions

Soit A un point de $\mathbb{R}^n$, deux réels r et r' respectivement strictement positif et positif. On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r , l'ensemble $B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n, d(X, A) < r\}$. Par ailleurs on appelle boule fermée de centre A et de rayon r' , l'ensemble $B(A, r') = \{X \in \mathbb{R}^n, d(X, A) \leq r'\}$.

1.1.2 Exemples

Pour $n = 3$, l'espace, la boule fermée de centre A et de rayon r est naturellement le solide constitué des points délimités par la sphère de centre A et de rayon r , les points de la sphère inclus. Tandis que la boule ouverte de centre A et de rayon r est le même ensemble de points sans les points de la sphère.

Pour $n = 2$, la boule fermée de centre A et de rayon r est le disque délimité par le cercle de centre A et de rayon r , incluant les points du cercle, tandis que la boule ouverte de centre A et de rayon r serait le disque délimité par le cercle de centre A et de rayon r , sans les points du cercle.

Enfin dans $\mathbb{R}$, la boule fermée de centre A et de rayon r est l'intervalle fermé $[A - r, A + r]$, tandis que la boule ouverte de centre A et de rayon r serait l'intervalle ouvert $]A - r, A + r[$.

1.2 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Définitions

Un ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est appelé un ouvert de $\mathbb{R}^n$ lorsque Ω est vide ou bien lorsque pour tout point A de Ω , il existe une boule ouverte de centre A , incluse dans Ω .

Par ailleurs un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé lorsque son complémentaire est un ouvert. De la même façon le complémentaire d'un fermé étant un ouvert.

1.2.2 Exemples

$\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide, les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide, les boules fermées de $\mathbb{R}^n$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ et l'ensemble vide sont donc à la fois des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^n$.

1.2.3 Théorèmes

Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute réunion finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et toute intersection de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Voyons un exemple d'intersection infinie d'ouverts qui est un fermé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[= \{x\}$$

Tout produit cartésien de n ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et tout produit cartésien de n fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

1.2.4 Exemples importants car très utiles

Par exemple, pour tout couple de réels (a, b) tel que $a < b$, $[a, b]^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ tandis que $]a, b[^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.2.5 Ensembles bornés

Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit borné lorsqu'il est inclus dans une boule.

Théorème : Une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si :

$$\exists r > 0, \forall (A, B) \in \Omega^2, d(A, B) \leq r$$

2 Extréma (ou extrémums)

2.1 Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f présente un maximum local en un point A de Ω lorsqu'il existe une boule ouverte B_A centrée en A telle que pour tout x de $\Omega \cap B_A$ on a : $f(x) \leq f(a)$.

On dit que f présente un maximum global en A si : $\forall x \in \Omega, f(x) \leq f(a)$.

On définit de la même façon les notions de minimum local et minimum global en changeant le sens des inégalités.

2.2 Le cas des fonctions numériques (définies sur $\mathbb{R}$)

Regardons le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur un intervalle fermé atteint toujours son maximum et son minimum sur cet intervalle.

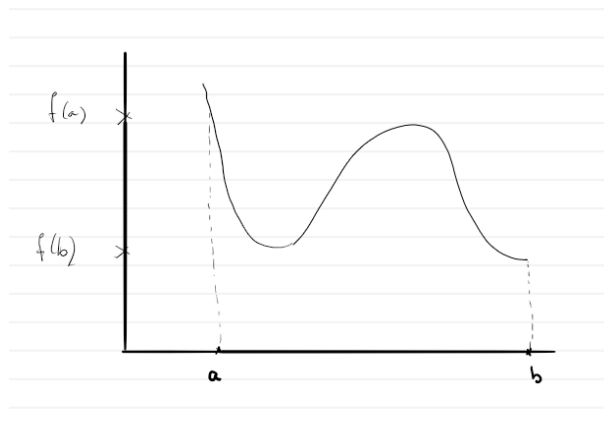


FIGURE 1 – Le graphe d'une fonction atteignant ses extrema sur un fermé dans $\mathbb{R}$

Sans que les points où la fonction atteint ses extréma ne soient des points "intéressants" à étudier. Je vous ai par exemple représenté ici le graphe d'une fonction sur un intervalle fermé $[a, b]$ où la fonction atteint son minimum et maximum aux bornes de l'intervalle. La notion d'extremum sur un fermé n'aura pas beaucoup d'intérêt pour nous.

En revanche, une fonction n'admet pas toujours un minimum et un maximum sur un ouvert. Dans le dessin ci-dessous, la fonction représentée n'admet pas d'extremum sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, mais elle admet des extrema locaux aux voisinages respectivement de c et d . C'est à dire sur un intervalle ouvert contenant c , sur lequel la fonction admettrait un minimum local en c , ou sur un intervalle ouvert contenant d sur lequel il admettrait un maximum local en d .

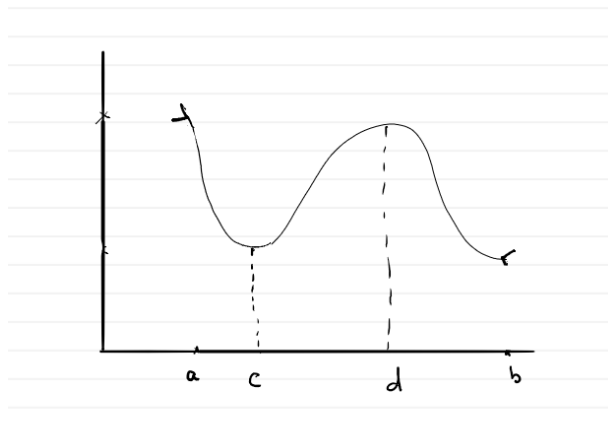


FIGURE 2 – Le graphe d'une fonction et ses extrema locaux sur un ouvert dans $\mathbb{R}$

Ce qui est intéressant à noter concernant ces extrema locaux, c'est que ce sont **nécessairement** des points où la tangente à la courbe est horizontale, autrement dit des points où **la dérivée de la fonction représentée s'annule**, sous hypothèse bien sûr que la fonction soit bien dérivable sur l'intervalle ouvert considéré.

Ce qui nous amène à un autre point important à noter : une fonction peut ne posséder aucun extrémum sur un intervalle ouvert, même en un point de cet ouvert où la dérivée de la fonction représentée s'annulerait. C'est par exemple le cas pour la fonction représentée ci-dessous :

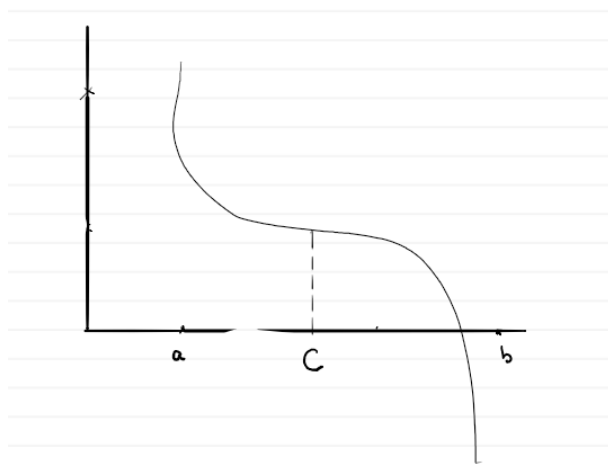


FIGURE 3 – Le graphe d'une fonction sans extrema sur un ouvert dans $\mathbb{R}$

Nous allons généraliser ces points constatés en dimension 1.

2.3 Généralisation

2.3.1 Cas particulier important

Toute fonction continue sur un fermé borné de Ω de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet un maximum global et un minimum global sur Ω .

Dans la suite, on ne considère plus que des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$

2.3.2 Condition nécessaire

Définition : Soit f une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On dit que le point A de Ω est un point critique de f lorsque $\nabla(f)(A)$ est nul.

Pour rappel le gradient de f noté $\nabla(f)(A)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Il est nul en A si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont nulles en A .

Théorème : Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local ou global en un point A de Ω , alors A est un point critique de f .

Autrement dit Si f admet un extremum local ou global en un point A de Ω , alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_i(f)(A) = 0$$

On retient ici que le fait que A soit un point critique de f est une condition nécessaire pour que A soit un extrémum de f sur un ouvert contenant A .

2.3.3 Point selle

Définition : On appelle point selle, ou encore point col, tout point critique de f en lequel f n'admet pas d'extremum.

Dans la dernière figure en dimension 1 vue plus haut, le point d'abscisse c est un point selle de la fonction f . En effet, c'est bien un point où la dérivée s'annule, sans qu'il s'agisse d'un extrémum.

Voici un autre exemple de point selle, pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui permet de mieux comprendre pourquoi on appelle un tel point un point selle (ou un point col).

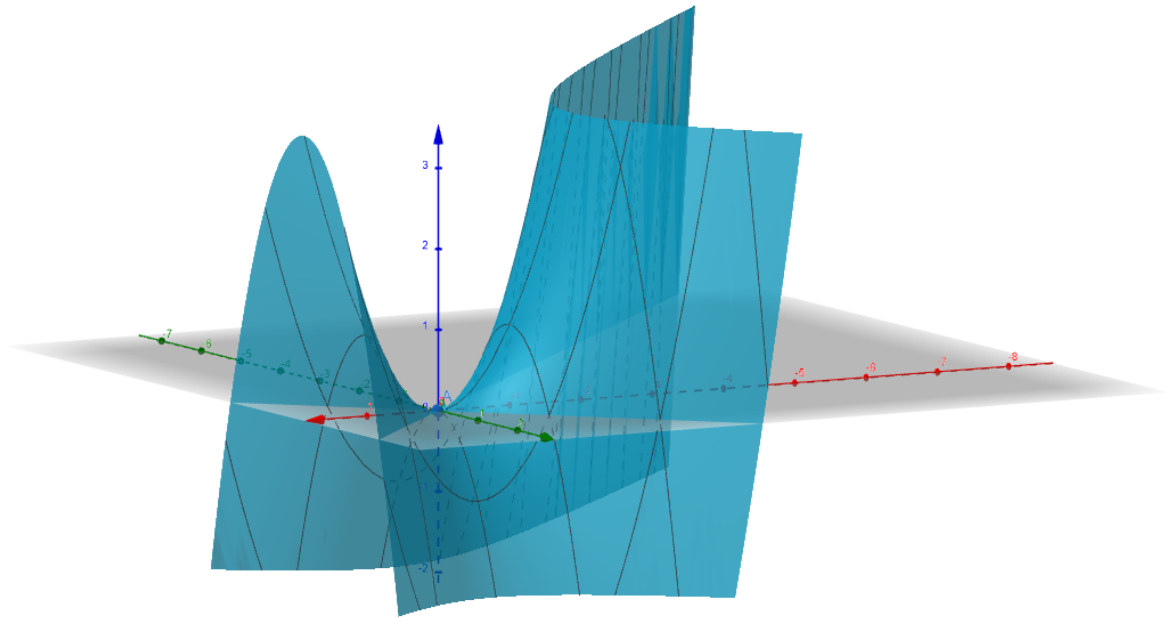


FIGURE 4 – Le graphe de $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ et son point selle en $(0,0)$

2.3.4 Condition suffisante

Théorème : Soit une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et A un point critique de f sur Ω .

* Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ sont toutes strictement positives, alors f possède un minimum local en A .

* Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ sont toutes strictement négatives, alors f possède un maximum local en A .

* Si $\nabla^2(f)(A)$ possède (au moins) une valeur propre strictement positive, et (au moins) une valeur propre strictement négative, alors f ne possède pas d'extremum en A .

* Dans le cas où toutes les valeurs propres sont de même signe, mais qu'au moins une valeur est propre est nulle, le théorème ne permet pas de conclure.

3 Méthode pour déterminer les extrema éventuels d'une fonction

3.1 Une méthode en deux étapes

La méthode que nous allons illustrer ensemble à l'aide d'un exemple comporte deux grandes étapes :

* Une première étape consiste à déterminer les points critiques, candidats à être éventuellement des points où la fonction atteint un extrémum local. Dans cette première étape on va déterminer le vecteur gradient et chercher les points où il est nul.

* Une deuxième étape où on examine les points critiques trouvés pour voir si ce sont des points où la fonction atteint un extrémum local ou pas. Dans cette deuxième étape on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 pour déterminer la matrice Hessienne en ces points puis calculer ses valeurs propres.

3.1.1 Recherche des points critiques

Rappelons que si une fonction f admet un extremum en un point d'un ouvert, ce point est nécessairement un point critique de f (voir la condition nécessaire ci-dessus). Rappelons également que pour une fonction f admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on dit que le point A de Ω est un point critique de f lorsque le vecteur $\nabla(f)(A)$ est nul.

Pour rechercher les éventuels extremums d'une fonction sur un ouvert, on commence donc par rechercher les points critiques dans un premier temps, pour déterminer ensuite si ces points critiques sont éventuellement des extremums dans un deuxième temps.

3.1.2 Examen des points critiques

Une fois les points critiques déterminés, pour savoir si en ces points la fonction atteint un extrémum nous devons les examiner, un par un. Voici comment procéder pour un point critique A donné :

* CAS 1 : Si les valeurs propres de la matrice Hessienne de f en A notée $\nabla^2(f)(A)$ sont strictement positives, alors f présente un **minimum local** en A .

* CAS 2 : Si les valeurs propres de la matrice Hessienne de f en A notée $\nabla^2(f)(A)$ sont strictement négatives, alors f présente un **maximum local** en A .

* CAS 3 : Si la matrice Hessienne de f en A notée $\nabla^2(f)(A)$ possède au moins une valeur strictement positive et au moins une valeur strictement négative en A , alors f n'a pas d'extremum en A .

* A noter que dans tous les autres cas, c'est à dire dès lors que les valeurs propres sont du même signe et qu'au moins l'une d'entre elles est nulle, **on ne peut pas conclure**.

3.2 Exemples

3.2.1 Exemple 1

On note $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on considère la fonction f définie sur Ω par :

$$\forall (x, y, z) \in \Omega; f(x, y, z) = \frac{xz}{y} - z - x + \frac{1}{2}y^2$$

Enoncé du problème : Montrer que f admet un unique point critique : $A = (1, 1, 1)$. La fonction f a-t-elle un extremum local en ce point ?

Solution

La fonction f est de classe C^2 sur Ω en tant que somme d'un quotient de polynomes bien défini sur $\Omega : (x, y, z) \mapsto \frac{xz}{y}$, et d'un polynome $(x, y, z) \mapsto -z - x + \frac{1}{2}y^2$

Première étape : Recherche du ou des points critiques

Commençons par exprimer les trois dérivées partielles d'ordre 1 de f sur Ω :

$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \partial_1(f)(x, y, z) = \frac{z}{y} - 1; \partial_2(f)(x, y, z) = -\frac{xz}{y^2} + y \text{ et } \partial_3(f)(x, y, z) = \frac{x}{y} - 1;$$

La fonction f étant de classe C^1 sur Ω (puisque de classe C^2 sur Ω comme justifié plus haut) et Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^3$ en tant que produit cartésien d'ouverts de $\mathbb{R}$, si f présente un extremum local sur Ω ce sera (comme expliqué dans le cours au paragraphe **condition nécessaire**) en un **point critique**. C'est à dire en un point $A = (x, y, z)$ de Ω solution du système d'équations suivant :

$$\nabla(f)(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} \partial_1(f)(xyz) = 0 \\ \partial_2(f)(xyz) = 0 \\ \partial_3(f)(xyz) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{z}{y} - 1 = 0 \\ -\frac{xz}{y^2} + y = 0 \\ \frac{x}{y} - 1 = 0 \end{cases}$$

De L_1 on tire $z = y$. De L_3 on tire $x = y$ et en reportant dans L_2 on trouve :

$-\frac{y^2}{y^2} + y = 0$, c'est à dire $y = 1$ puis en reportant dans les autres équations on trouve finalement $x = y = z = 1$.

En conclusion : le seul point critique de f est le point $(1, 1, 1)$.

Deuxième étape : Examen du point critique trouvé

Calculons les dérivées partielles secondes, en nous rappelant qu'il est inutile de calculer les 9, les dérivées "croisées" étant égales du fait du théorème de Schwartz :

En un point (x, y, z) quelconque de Ω nous aurions :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y, z) = 0; \partial_{1,2}^2(f)(x, y, z) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y, z) = -\frac{z}{y^2} \text{ et } \partial_{1,3}^2(f)(x, y, z) = \partial_{3,1}^2(f)(x, y, z) = \frac{1}{y};$$

Par conséquent au point critique $(1, 1, 1)$ cela nous donne :

$$\partial_{1,1}^2(f)(1, 1, 1) = 0; \partial_{1,2}^2(f)(1, 1, 1) = \partial_{2,1}^2(f)(1, 1, 1) = -1 \text{ et } \partial_{1,3}^2(f)(1, 1, 1) = \partial_{3,1}^2(f)(1, 1, 1) = 1;$$

Par ailleurs, en un point (x, y, z) quelconque de Ω nous aurions :

$$\partial_{2,2}^2(f)(x, y, z) = \frac{2xz}{y^3} + 1; \partial_{2,3}^2(f)(x, y, z) = \partial_{3,2}^2(f)(x, y, z) = -\frac{x}{y^2}$$

Par conséquent au point critique $(1, 1, 1)$ cela nous donne :

$$\partial_{2,2}^2(f)(1, 1, 1) = 3; \partial_{2,3}^2(f)(1, 1, 1) = \partial_{3,2}^2(f)(1, 1, 1) = -1$$

Pour finir comme en un point (x, y, z) quelconque de Ω nous avons : $\partial_{3,3}^2(f)(x, y, z) = 0$, alors en particulier au point $(1, 1, 1)$ nous avons également $\partial_{3,3}^2(f)(1, 1, 1) = 0$

En conclusion la la matrice Hessienne de f au point $A = (1, 1, 1)$ s'écrit :

$$\nabla^2(f)(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour finir, nous allons calculer les valeurs propres de cette matrice. Rappelons que pour calculer les valeurs propres d'une telle matrice, nous allons chercher à déterminer les réels λ tels que la matrice $\nabla^2(f)(A) - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

Vous pouvez utiliser la méthode de votre choix, comme celle de Gauss-Jordan ou bien le calcul du déterminant, pour arriver au polynôme caractéristique suivant en λ dont nous allons chercher les racines :

$$P(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - 4\lambda + \lambda^2)$$

En conclusion finale : les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ étant (-1) , $(2 - \sqrt{3})$ et $(2 + \sqrt{3})$, $\nabla^2(f)(A)$ possède deux valeurs propres strictement positives et une valeur propre strictement négative donc f ne possède pas d'extremum en A . Autrement dit A est un point selle.

3.2.2 Exemple 2

Essayer d'appliquer cette méthode pour rechercher d'éventuels extrema locaux pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy - x - y - 6z + 5$

Je vous proposerai un corrigé de cet exemple supplémentaire ici (moodle Epita).