

Chapitre 3 : Intégrales multiples

Table des matières

1	A propos de ce cours. Contient le lien. A lire !	3
1.1	Prérequis	3
1.2	Le lien	3
2	Intégrale double sur un rectangle	3
2.1	Interprétation de l'intégrale comme volume	3
2.2	Un premier exemple	3
3	Intégrales multiples (iterated integrals)	3
3.1	Principe	3
3.2	Théorème de Fubini	3
4	Intégrale double sur un domaine de forme queconque (Double Integrals Over General Regions)	4
4.1	Principe	4
4.2	Exemple	4
5	Intégrale double en coordonnées polaires (Integrals in Polar Coordinates)	4
5.1	Principe	4
5.2	Exemple	5
6	Intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques (Triple Integrals in Cylindrical Coordinates Triple Integrals in spherical Coordinates)	5
7	Fin du cours	5

1 A propos de ce cours. Contient le lien. A lire !

1.1 Prérequis

Pour ce cours vous devez connaître le principe de l'intégration pour les fonctions d'une variable, dont la technique de changement de variable.

Nous aurons également besoin de connaître la définition des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

1.2 Le lien

Voici un lien vers un cours très accessible qui explique clairement les points essentiels qui nous intéressent. Ici je vais me référer à ce cours, le commenter et l'expliquer :

<https://courses.lumenlearning.com/boundless-calculus/chapter/multiple-integrals>

Vous pouvez vous arrêter au paragraphe "Applications of Multiple Integrals" qui n'est pas obligatoire.

2 Intégrale double sur un rectangle

Dans un premier temps on considère le cas le plus simple, celui d'une intégrale double, où les variables x et y varient chacune entre deux valeurs constantes. D'où l'expression intégrer sur un rectangle.

2.1 Interprétation de l'intégrale comme volume

Vous pouvez voir la représentation de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Le but est d'illustrer l'interprétation qu'on peut faire de l'intégration d'une fonction (en l'occurrence $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$) sur un domaine d'intégration rectangulaire (le rectangle "au sol" dans la représentation).

2.2 Un premier exemple

Vous avez ici le calcul de l'intégrale suivante comme premier exemple :

$$\iint_S (x^2 + 4y) dx dy$$

Soit on intègre d'abord par rapport à x à y constant puis on intègre le résultat par rapport à y . Soit on intègre par rapport à y à x constant, puis on intègre le résultat par rapport à x .

3 Intégrales multiples (iterated integrals)

3.1 Principe

On explique à nouveau le principe d'intégrer par rapport à une variable en fixant les autres, puis d'intégrer le résultat par rapport à une autre, etc. D'où le "iterative integrals".

3.2 Théorème de Fubini

Il est fait allusion au théorème de Fubini qui est important et qui permet toutes ces "inversions d'ordre" dans les variables considérées dans notre calcul intégral.

Les conditions d'applicabilité de ce théorème ne sont pas trop restrictives. Voici un énoncé simplifié pour le cas d'une intégrale double :

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

4 Intégrale double sur un domaine de forme queconque (Double Integrals Over General Regions)

4.1 Principe

On généralise. On a commencé par considérer le cas où le domaine est un rectangle. Désormais on peut faire varier une variable entre des bornes qui sont fonction de l'autre variable. Dans l'exemple qui suit x varie entre deux constantes mais y lui varie entre une constante et une fonction de x .

4.2 Exemple

Dans cet exemple :

$$\iint_D (x + y) dx dy \text{ où } D = \{(x, y), x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$$

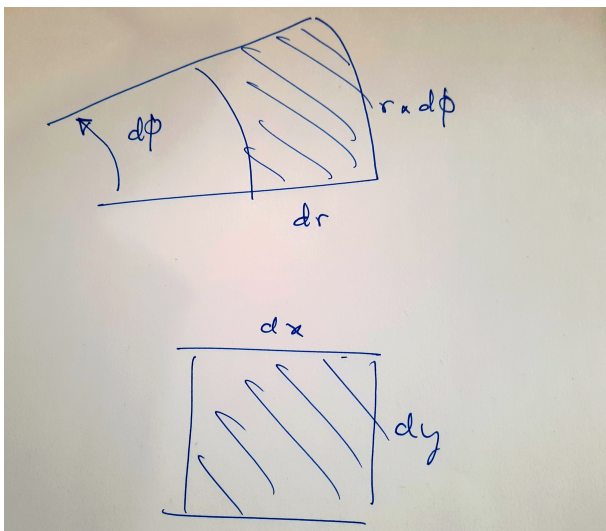
Regardez le domaine D représenté sur la figure. Pour couvrir tout le domaine D , à x constant on fait varier y de x^2 à 1, puis on fait varier x de 0 à 1.

5 Intégrale double en coordonnées polaires (Integrals in Polar Coordinates)

5.1 Principe

Le principe est clairement expliqué. C'est celui d'un changement de variable.

Pour une explication "géométrique" on peut considérer que la surface infinitésimale $dx dy$ en coordonnées cartésiennes, devient $dr \times r d\phi$ en coordonnées polaires.



Sinon on opère un changement de variable sans interpréter outre mesure. Là où pour une intégrale simple en x le changement de variable $x = f(\alpha)$ transforme dx en $f'(\alpha)d\alpha$, pour une intégrale double

et pour le double changement de variables $x = f(r), y = g(\Phi)$ on a :

$$dxdy = \begin{vmatrix} f'(r) & f'(\Phi) \\ g'(r) & g'(\Phi) \end{vmatrix} \times drd\Phi$$

Où $\begin{vmatrix} f'(r) & f'(\Phi) \\ g'(r) & g'(\Phi) \end{vmatrix}$ est le déterminant de la jacobienne de (x, y) . C'est à dire le déterminant de la matrice des dérivées parielles d'ordre un de x et de y par rapport aux nouvelles variables r et à ϕ . Si vous mettez ce calcul en parallèle avec ce qui se passe en dimension 1, vous comprendrez mieux.

5.2 Exemple

Exemple à refaire. Comme tous les exemples de ce cours. A noter qu'on ne se contente pas de transformer $dxdy$, mais on ré-écrit également la fonction à intégrer par rapport aux nouvelles veriables.

6 Intégrales triples en coordonnées cylindriques et sphériques (Triple Integrals in Cylindrical Coordinates Triple Integrals in spherical Coordinates)

Le principe du changement de variable appliqué à ces deux autres systèmes de coordonnées en dimension 3. Le principe est le même. Refaire les exemples !

7 Fin du cours

A noter que le paragraphe "Triple Integrals" reprend les principes précédents avec un nouvel exemple, tandis que "Change of Variables" est une synthèse de ce qui est expliqué plus haut sur les différents systèmes de coordonnées.

Le dernier paragraphe "Applications of Multiple Integrals" est facultatif.