Exercice 1

Paviel Schertzer
Epita Ing1 2022

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que $f(x)$ est une densité de probabilité

2) Soit X la variable aléatoire de densité $f(x)$.
Déterminer la fonction de répartition de X

3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

RAPPEL :
$f(x)$ est une densité de probabilité $\Leftrightarrow \begin{cases} (i) & f(x) > 0 \\ & \text{et} \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

1) (i) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On remarque que f est paire, $f(x) = f(-x)$

(ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f paire

$= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \boxed{1}$

$f(x)$ est une densité sur $\mathbb{R}$.

RAPPEL
Fonction de répartition de X : $F(x) = \mathcal{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

à cause de la valeur absolue on aura deux cas :
$x < 0$ et $x > 0$

2) 1er cas : $x < 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_{-\infty}^{x} = \boxed{\frac{1}{2} e^{x}}$

2ème cas : $x > 0$

relation de Chasles

$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{x} e^{-t}\,dt$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} = \boxed{1 - \frac{1}{2} e^{-x}}$

Remarque : notre fonction de répartition est continue

Donc $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

F est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x \mapsto 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = F(0) = \frac{1}{2}$

RAPPEL :
$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$

$$V(X) = E(X)^2 - E^2(X)$$

$$E(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, f(x) \, dx$$

3) $E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \, e^{-|x|}}_{\text{impaire}} dx = 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ impaire}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ paire}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2 e^{-|x|}}_{\text{paire}} = \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\int_{0}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v}\, \underbrace{e^{-x}}_{u'} \, dx$$

Intégration par parties

$\begin{cases} v = x^2 \\ u = e^{-x} \end{cases}$ $\quad v' = 2x$, $u = e^{-x}$

$$E(X^2) = \underbrace{\cancel{\left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{+\infty}}}_{0 \; x \to +\infty} - e\int_0^{+\infty} x(-e^{-x})\,dx = 2\int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{e^{-x}}_{u'}\,dx$$

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx = 2\left(\underbrace{\cancel{\left[-x\,e^{-x}\right]_0^{+\infty}}}_{0 \; x \mapsto +\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-x})\,dx\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= 2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$$

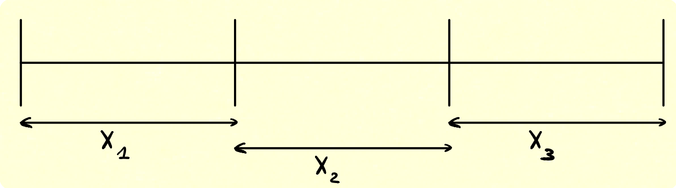
$$= \boxed{2}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - \underbrace{\cancel{E^2(X)}}_{=0} = 2$

Exercice 2 : problème : domaine de fiabilité des systèmes
Le fonctionnement d'une machine est perturbé.
On considère 3 variables aléatoires : X_1, X_2, X_3

X_1 : le temps expiré entre le temps en heures écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne X_2 (respectivement X_3) et le temps en heures écoulé entre la remise en route de la machine après la première (respectivement la seconde) panne et la panne suivante.
Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue.
(X_i) sont des variables aléatoires <u>indépendantes</u> et de <u>même loi</u>, dont la densité est $f(t) = \begin{cases} 1/2 \; e^{-t/2} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

1) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2) Soit E ''Chacune des trois périodes de fonctionnement durent plus de 2h''
   Calculer $\mathcal{P}(E)$
3) Soit Y la variable aléatoire égale à la lus grande des trois durées de fonctionnement.
   Calculer $\mathcal{P}(Y \leqslant t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
4) Déterminer une densité de Y
5) Calculer $\int_0^{+\infty} t\, e^{at}\, dt \; (\forall a \in \mathbb{R}_-^*)$, en déduire $E(Y)$.



1) La durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives

$$E(X_i) = \int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\, t e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \underbrace{t}_{v} \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{u'}\, dt$$

$$E(X_i) = \frac{1}{2}\left(\Big[\cancel{-2t e^{-\frac{t}{2}}}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-2 e^{-\frac{t}{2}})\, dt\right)$$

$$E(X_i) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \Big[-2 e^{-\frac{t}{2}}\Big]_0^{+\infty} = 2$$

$$\boxed{E(X_i) = 2\, h}$$

2) Soit E « Chacune des 3 périodes de fonctionnement dure plus de 2h »

$$E = \bigcap_{i=1} (X_i \geqslant 2)$$

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{i=1} (X_i \geqslant 2)\Big) = \prod_{i=1}^{3} \mathcal{P}(X_i \geqslant 2)$$

$$\mathcal{P}(X_i \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} f(t)\, dt = \int_2^{+\infty} 1/2\; e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\Big[-2 e^{-\frac{t}{2}}\Big]_2^{+\infty} = e^{-1}$$

Donc $\mathcal{P}(E) = \prod_{i=1}^{3} e^{-1} = \boxed{e^{-3}}$

3) $Y = \underset{1 \leq i \leq 3}{\mathrm{Max}}\, X_i$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{\mathcal{P}(Y \leq t)}_{\substack{\shortparallel \\ F_Y(t)}} = \mathcal{P}(\underset{1 \leq i \leq 3}{\mathrm{Max}}\, X_i \leq t)$

$F_Y(t)$ fonction de répartition de Y

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}(Y \leq t) = \mathcal{P}(X_i \leq t \quad \forall i = 1,2,3)$$
$$= \mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{3} (X_i \leq t)\right) = \prod_{i=1}^{3} F_{X_i}(t)$$

où $F_{X_i}(t)$ est la fonction de répartition de X_i

$$F_{X_i}(t) = \mathcal{P}(X_i \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du$$

1^{er} cas : $t < 0$

$$F_{X_i}(t) = 0$$

$2^{ème}$ cas : $t \geq 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = \int_0^t \tfrac{1}{2} e^{-u/2}\,du = \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{u}{2}}\right]_0^t = -e^{-t/2} + 1 = \boxed{1 - e^{-\frac{t}{2}}}$$

$$F_Y(t) = \mathcal{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{2}})^3 & t \geq 0 \end{cases}$$

$Y = \underset{1 \leq i < 3}{\mathrm{Max}}\, X_i$

4) Une densité de Y s'obtient en dérivant $F_Y(t)$

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}} (1 - e^{-t/2})^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

5) Calculer $\int_0^{+\infty} t e^{at}\,dt \quad \forall a \in \mathbb{R}_-^*$

$$I = \int_0^{+\infty} \underset{v}{t}\, \underset{u'}{e^{at}}\,dt = \left[\cancel{t \frac{e^{at}}{a}}\right] - \int_0^{+\infty} \frac{e^{at}}{a}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{a} e^{at} = -\left[\frac{1}{a^2} e^{at}\right]_0^{+\infty}$$

$\to 0$ $\quad t \to +\infty$ car $a < 0$

$$= \boxed{\frac{1}{a^2}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{a^2}}$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t)\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} t\, e^{-\frac{t}{2}} (1 - e^{-\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} -e^{-\frac{t}{2}} (1 - 2e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t})\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} t\,(e^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-t} + e^{-\frac{3}{2}t})\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\left(\int_0^{+\infty} t\, e^{-\frac{t}{2}}\,dt - 2\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{3}{2}t}\,dt\right)$$

D'après la 4ième question,

$$E(Y) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(-1/2)^2} - \frac{2}{(-1)^2} + \frac{1}{(3/2)^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(4 - 2 + \frac{4}{9}\right) = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}\ h = 3\ h\ 40\ min$$

moyenne de la durée max de fonctionnement

$$\boxed{E(Y) = 3\ h\ 40\ min}$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire positive de densité

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-x} x^{r-1} \quad (r > 0)$$

On dit que X suit la loi gamma de paramètre r notée γ_r où $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}$

(fonction gamma)

1) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \forall x > 0$

2) Calculer $\Gamma(1)$

3) En déduire $\Gamma(x+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

1) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x} dt$$

<u>Intégration par parties</u>

$$\begin{cases} v = t^x & v' = x t^{x-1} \\ u' = e^{-t} & u = -e^{-t} \end{cases}$$

$\forall x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \underbrace{\left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty}}_{\substack{t \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\,\Gamma(x)$$

2) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

3) $\Gamma(n+1)$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 1\,\overbrace{\Gamma(1)}^{1}$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

La fonction Γ prolonge la fonction factorielle aux réels positifs

4)

$$\Gamma(k + 1/2) = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k}\Gamma(1/2)$$

$$\Gamma(k + 1/2) = \Gamma(\underbrace{k - 1/2}_{x} + 1)$$

$$\Gamma(k + 1/2) = (k - 1/2)\,\Gamma(k - 1/2) \quad 1$$

$$= \frac{(2k-1)}{2}\Gamma(k - 1/2)$$

$$= \frac{(2k-1)}{2}(k - 3/2)\,\Gamma(k - 3/2)$$

$$\Gamma(k + 1/2) = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2.2}\Gamma(k - 3/2)$$

$$\Gamma(k + 1/2) = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots 5.3.1\,\overbrace{\Gamma(1/2)}^{\sqrt{\pi}}}{2^k}$$

Densité : $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-x} x^{r-1} \quad x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

5) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-x} x^r \, dx$

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^r \, dx = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} = \frac{r\Gamma(r)}{\Gamma(r)} = r$$

$$\boxed{E(X) = r}$$

Rappel

$$V(X) = E(X^2) - E(X)$$

6) $V(X) = E(X^2) - E(X)$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-x} x^{x+1} \, dx = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{r+1} \, du = \frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)}$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)} = \frac{(r+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} = \frac{(r+1)\, r\, \Gamma(r)}{\Gamma(r)} = \boxed{r^2 + r}$$

$$V(X) = r^2 + r - r^2 = r \Rightarrow \boxed{V(X) = r}$$

Exercice 4

La durée de fonctionnement exprimée en jours, d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont la densité est la fonction $f(x) = \begin{cases} \beta x^2 e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

1. Calculer la valeur β en fonction de α.
2. Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours, calculer α.
3. Soit $Y = \sqrt{X}$ déterminer une densité de Y.

1) Si f est une densité $\Longleftrightarrow$ (i) $f \geq 0 \Rightarrow \boxed{\beta \geq 0}$ et (ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\beta \underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,dx}_{I} = 1$$

$\beta \cdot I = 1$

$$\beta = \frac{1}{I} = \frac{\alpha^3}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\alpha^3}{2}}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}\,dx$$

IPP

$\begin{cases} v = x^2 & v' = 2x \\ u' = e^{-\alpha x} & u = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \end{cases}$

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,du = \cancel{\left[-\frac{x^2}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty}} + \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,du$$

$x \to +\infty$; 0

$$I = \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{v} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}\,dx$$

$$I = \frac{2}{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx\right) = \frac{2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{2}{\alpha^2}\left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{2}{\alpha^3}}$$

2) $E(X) = 200$ jours

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \beta \int_0^{+\infty} \underbrace{x^3}_{v} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}\,dx$$

$$E(X) = \beta\left(\cancel{\left[-\frac{x^3}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty}} + 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,dx\right)$$

$x \to +\infty$; 0

$$E(X) = \frac{3\beta I}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} = 200 \text{ jours}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{200}}$$

3) $Y = \sqrt{X}$

F_Y fonction de répartition de Y

$$F_Y(x) = \mathcal{P}(Y < x) = \mathcal{P}(\sqrt{X} < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \underbrace{\mathcal{P}(X < x^2)}_{= F_X(x^2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Une densité de Y est :

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x\, F_X'(x^2) \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x \; f(x^2) \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x \beta x^4 e^{-\alpha x^2} \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^5 \frac{\alpha^3}{\cancel{2}} e^{-\alpha x^3} = \alpha^3 x^5 e^{-\alpha x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soit X_n une suite

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que $f_n(x)$ est une densité

2) X_n sont de densité f_n

$$Y_n = n X_n$$

Montrer que $Y_n \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{\mathcal{L}} Y$ variable aléatoire dont on déterminera une densité

1) $f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_0^1 (n+1)(1-x)^n\,dx = (n+1)\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n+1}{n+1} = \boxed{1}$$