

Fiche Probas Continues

Simon LLAGUNE A2

- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

- (i) $F'(x) = f(x)$ car F est croissante

- (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ condition de normalisation

- Vérifier que f est une densité :

- ① $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{I}$

- ② $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ si l'intégrale CV.

ESPÉRANCE

Rappel : l'Espérance est linéaire

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$ avec φ une fctⁿ quelconque

- $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ écart-type

VARIANCE

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx \quad \text{si l'intégrale CV}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right]^2}_{E(X)^2}$$

- $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$

• Lois usuelles continues

loi Uniforme

$$X \sim \mathcal{U}(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

loi Exponentielle

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \\ \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propriété : "Absence de mémoire"

$$P_{X>s}(X \geq s+t) = P(X > t)$$

loi normale:

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$E(X) = m \quad ; \quad V(X) = \sigma^2 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{V(X)}$$

loi normale
centrée-réduite

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$E(X) = 0 \quad ; \quad V(X) = 1$$

• Convergence en probabilité et en loi

> Inégalité de Markov

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } X \text{ v.a.} \\ \text{\AA densité} \\ \text{admettant un} \\ \text{moment d'ordre} \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon} \quad \left| \begin{array}{l} \text{moment} \\ \text{d'ordre } 1 \end{array} \right.$$

↳ Plus l'espérance de X est petite, moins il est probable que X prenne de grandes valeurs

> Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

↳ Une v.a. X prendra avec une grande probabilité une valeur relativement proche de son espérance

◦ Convergence en probabilité:

Soient: (X_n) suite v.a

X une v.a

$$X_n \xrightarrow{IP} X \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Rq: Si $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $V(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

alors, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{IP} a$

◦ Loi faible des grands nombres

Théorème: (X_n) une suite v.a. indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance m et une variance σ^2

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{alors} \quad \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{IP} m = E(X_n)$$

◦ Convergence en loi

(X_n) suite v.a. de f.d.e $F_{X_n}(x)$

X une v.a. de f.d.e $F_X(x)$

(X_n) converge en loi vers X (notée: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$)

si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

◦ Théorème Centrale Limite

(X_n) une suite v.a. indépendantes et identiquement distribuées d'espérance m et d'écart-type σ

$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

alors

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n m = n \times m$$

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n \sigma^2 = n \times \sigma^2$$

◦ CV en proba $\Rightarrow$ CV en loi

Rappel : Intégrales de Riemann

$$\circ \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{CV} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$\circ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{CV} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{DV}$$