

A Exercices

A.1 Polarisation

On a vu que l'on pouvait utiliser une notation complexe pour représenter le champ électrique associé à une onde électromagnétique progressive :

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{0x} \cos(\omega t - \delta_x) = \operatorname{Re} [E_{0x} e^{i\delta_x} e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re} [\mathcal{E}_x e^{-i\omega t}] \\ E_y(t) &= E_{0y} \cos(\omega t - \delta_y) = \operatorname{Re} [E_{0y} e^{i\delta_y} e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re} [\mathcal{E}_y e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

Soient deux nombres, λ réel et μ complexe, paramétrés par

$$\lambda = \cos \theta \quad \mu = \sin \theta e^{i\delta_y}$$

Un polariseur (λ, μ) est constitué de trois éléments :

- Une première lame biréfringente qui déphase $\mathcal{E}_y$ de $-\eta$ en laissant $\mathcal{E}_x$ inchangé soit

$$\mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_x^{(1)} = \mathcal{E}_x \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{E}_y^{(1)} = \mathcal{E}_y e^{-i\eta}$$

- Un polariseur linéaire qui projette suivant $\hat{n}_\theta$ selon

$$\mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \mathcal{E}^{(2)} = \left(\mathcal{E}_x^{(1)} \cos \theta + \mathcal{E}_y^{(1)} \sin \theta \right) \hat{n}_\theta = \left(\mathcal{E}_x \cos \theta + \mathcal{E}_y \sin \theta e^{-i\eta} \right) \hat{n}_\theta$$

- Une seconde lame biréfringente qui laisse $\mathcal{E}_x^{(2)}$ inchangé et déphase $\mathcal{E}_y^{(2)}$ de η soit

$$\mathcal{E}_x^{(2)} \rightarrow \mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x^{(2)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_y^{(2)} \rightarrow \mathcal{E}'_y = \mathcal{E}_y^{(2)} e^{i\eta}$$

La combinaison des trois opérations est représentée par $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$.

1. Calculer les composantes $\mathcal{E}'_x$ et $\mathcal{E}'_y$ en fonction de $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$.

Solution : Les composantes de $\mathcal{E}'_x$ et $\mathcal{E}'_y$ sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_x &= \mathcal{E}_x \cos^2 \theta + \mathcal{E}_y \sin \theta \cos \theta e^{-i\eta} = |\lambda|^2 \mathcal{E}_x + \lambda \bar{\mu} \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}'_y &= +\mathcal{E}_x \sin \theta \cos \theta e^{i\eta} + \mathcal{E}_y \sin^2 \theta = \bar{\lambda} \mu \mathcal{E}_x + |\mu|^2 \mathcal{E}_y \end{aligned}$$

2. On décide de représenter les polarisations $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ par des vecteurs, que l'on note $|\mathcal{E}\rangle$ et $|\mathcal{E}'\rangle$, qui s'expriment dans la base orthogonale $\{|x\rangle, |y\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ selon

$$|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}_x |x\rangle + \mathcal{E}_y |y\rangle \quad \text{et} \quad |\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{E}'_x |x\rangle + \mathcal{E}'_y |y\rangle$$

Déterminer la matrice $\mathcal{P}$ telle que $|\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{P} |\mathcal{E}\rangle$.

Solution : Cette opération s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}'_x \\ \mathcal{E}'_y \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \mathcal{E}_x + b \mathcal{E}_y \\ c \mathcal{E}_x + d \mathcal{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 \mathcal{E}_x + \lambda \bar{\mu} \mathcal{E}_y \\ \bar{\lambda} \mu \mathcal{E}_x + |\mu|^2 \mathcal{E}_y \end{pmatrix}$$

donc $\{a, b, c, d\} = \{|\lambda|^2, \lambda \bar{\mu}, \bar{\lambda} \mu, |\mu|^2\}$.

A.2 Cryptographie

Alice envoie un bit **1** grâce à un photon polarisé selon $\uparrow$ et celui-ci est intercepté par *Eve*. Si celle-ci utilise, par chance, la base de réception correcte, c'est-à-dire $\leftarrow \uparrow \rightarrow$, elle a alors 100% chance de détecter de trouver la valeur (correcte) **1** envoyer par *Alice*. En revanche, si *Eve* utilise la base de réception $\nearrow \nwarrow$, alors elle aura seulement 50% de chance de trouver cette valeur correcte. La probabilité, notée P , pour *Eve* de mesurer la valeur correcte envoyée par *Alice* est donc

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} = 75\%$$

On suppose maintenant que la base de réception de *Eve* fait un angle ϕ , au lieu de $\pm 45^\circ$, par rapport à l'axe Ox .

1. Montrer que la probabilité P_ϕ de succès pour *Eve* de mesurer le bit **1** est maintenant

$$P_\phi = \frac{1}{4} \left(2 + \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \right)$$

Solution : Si *Alice* envoie un bit **1** avec une polarisation selon $\uparrow$ alors il y a deux possibilité de polarisation. Soit selon $+90^\circ$ soit selon -45° . Comme *Eve* a une base qui fait un angle ϕ avec l'axe Ox alors, par projection, la probabilité de faire une mesure correcte est $\cos^2 \phi$. Si *Alice* envoie une polarisation selon -45° alors cette probabilité devient $\cos^2(\frac{\pi}{4} - \phi)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} P_\phi &= \frac{1}{2} \left\{ \cos^2(\phi) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(2\phi)] + \left[\cos(\phi) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\phi) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(2\phi)] + \frac{1}{2} [\cos(\phi) + \sin(\phi)]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(2 + \cos(2\phi) + 2 \cos(\phi) \sin(\phi) \right) \\ P_\phi &= \frac{1}{4} \left(2 + \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \right) \end{aligned}$$

2. Montrer que pour un choix d'angle optimal $\phi = \phi_0$, que l'on déterminera, on obtient une probabilité de succès supérieur à 75% (il n'est pas nécessaire de faire un calcul).

Solution : On détermine un extremum par différentiation

$$\frac{dP_\phi}{d\phi} = \frac{1}{2} \left(\cos(2\phi) - \sin(2\phi) \right) = 0$$

ce qui se réalise si $\phi = \phi_0 = \frac{\pi}{8}$ donc

$$P_{max} = P_{\phi=\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \simeq 0.854$$

3. Maintenant on suppose que *Alice* utilise une base d'émission qui fait un angle θ avec Ox et *Eve* utilise à nouveau les bases de réception $\{\leftarrow \uparrow \rightarrow, \nearrow \nwarrow\}$. Montrer que la probabilité pour *Eve* de se tromper est alors

$$P = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta)$$

Solution : Si *Alice* emploie une base $\{\theta, \theta_\perp\}$ pour l'envoi d'un photon, *Eve* obtient le résultat correct avec une probabilité de $\cos^2 \theta$ pour un photon selon θ et une probabilité de $\sin^2 \theta$ pour un photon selon $\theta_\perp$. Pour ces deux la probabilité que *Bob* reçoive la polarisation correcte est donc $\cos^4 \theta$ et $\sin^4 \theta$ respectivement. La probabilité de succès pour *Eve* est donc

$$\bar{P} = \frac{1}{2} (1 + \cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

et donc la probabilité d'erreur est

$$P = 1 - \bar{P} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta)$$