C Exercices

C.1 Opérateur de rotation pour le spin 1/2

1. Montrer que la valeur moyenne de $\langle\vec{\sigma}\rangle$ de l'opérateur dans l'état (3.4) est donnée par $\langle\vec{\sigma}\rangle = \hat{n}$ où $\hat{n}$ est défini par (3.5).

   Solution : L'action des opérateurs $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sur la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ donne

   $$\begin{array}{lll} \sigma_x|0\rangle = |1\rangle & \sigma_y|0\rangle = +i|1\rangle & \sigma_z|0\rangle = +|1\rangle \\ \sigma_x|1\rangle = |0\rangle & \sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle & \sigma_z|1\rangle = -|0\rangle \end{array}$$

   Ce qui permet de calculer que

   $$\sigma_x|\varphi\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}}\,\sin\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{-i\frac{\phi}{2}}\,\cos\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$
   $$\sigma_y|\varphi\rangle = -i\,e^{i\frac{\phi}{2}}\,\sin\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + i\,e^{-i\frac{\phi}{2}}\,\cos\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$
   $$\sigma_z|\varphi\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}}\,\cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle - e^{i\frac{\phi}{2}}\,\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

   de sorte que

   $$\langle\varphi|\sigma_x|\varphi\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\,(e^{i\phi} + e^{i\phi}) = \sin\theta\,\sin\phi$$
   $$\langle\varphi|\sigma_y|\varphi\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\,(-i\,e^{i\phi} + i\,e^{i\phi}) = \sin\theta\,\cos\phi$$
   $$\langle\varphi|\sigma_z|\varphi\rangle = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

   donc on a bien $\langle\vec{\sigma}\rangle = \langle\varphi|\vec{\sigma}|\varphi\rangle = \langle\varphi|\sigma_x|\varphi\rangle\,\vec{u}_x + \langle\varphi|\sigma_y|\varphi\rangle\,\vec{u}_y + \langle\varphi|\sigma_x|\varphi\rangle\,\vec{u}_z = \hat{n}$.

2. Montrer que

   $$\exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\right) = I\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

   où $\hat{p}$ est un vecteur unitaire.
   Rappel : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
   Suggestion : Calculer $(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2$. L'opérateur $\exp[-i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})/2]$ est l'opérateur unitaire de rotation $\mathcal{R}_{\hat{p}}(\theta)$ d'un angle θ autour de l'axe $\hat{p}$. Pour le voir, utiliser comme axe de rotation le vecteur $\hat{p} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ et montrer qu'une rotation d'angle θ autour de cet axe amène l'axe Oz sur le vecteur $\hat{n}$ (3.5). Montrer que $\exp[-i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})/2]|0\rangle$ est bien le vecteur $|\varphi\rangle$ (3.4), vecteur propre de $\vec{\sigma}\cdot\hat{n}$ avec la valeur propre +1, à un facteur de phase près. Que vaut $\exp[-i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})/2]\,|1\rangle$?

   Solution : On utilise l'identité (3.7) pour montrer que $(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2 = \mathcal{I}, (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^3 = (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}), \ldots$ Ceci permet d'évaluer l'expansion de l'exponentielle

   $$\begin{aligned}\exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\right) &= \mathcal{I} + \left(-i\,\frac{\theta}{2}\right)(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) + \frac{1}{2!}\left(-i\,\frac{\theta}{2}\right)^2\mathcal{I} + \frac{1}{3!}\left(-i\,\frac{\theta}{2}\right)^3(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) + \ldots \\ &= \mathcal{I}\,\cos\frac{\theta}{2} - i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\,\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

   L'action de l'opérateur $\exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\right)$ sur $|0\rangle$ est donc

   $$\exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})\right)\,|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\phi}\,\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

ce qui est le même état que (3.4) à un facteur de phase $e^{i\pi/2}$ près sans importance. L'opérateur $\exp[-i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})/2]$ fait tourner le vecteur $|0\rangle$, le vecteur propre de σ_z avec la valeur propre $+1$, sur le vecteur $|\varphi\rangle$, les vecteurs propres de $(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$ avec la même valeur propre. Le même résultat tient pour la valeur propre -1, correspondante à $|1\rangle$ et le vecteur tourné $\mathcal{R}_{\hat{p}}|1\rangle$.

3. Lorsque $\phi = -\pi/2$, la rotation s'effectue autour de Ox. Donner la forme matricielle explicite de $\mathcal{R}_x(\theta)$. Comparant avec (B.3) et (B.4), montrer que, sous l'action de $\vec{B}_1(t)$, le vecteur d'état tourne d'un angle $\theta = -\omega_1 t$ si ce champ est appliqué pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.

   Solution : On peut spécialiser les résultat de la question précédente en prenant le cas $\phi = \pi/2$ qui correspond à une rotation autour de $0x$, cela s'écrit

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -i\,\sin\theta/2 \\ -i\,\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

   Une rotation autour de l'axe Ox transforme $|0\rangle$ en le vecteur

$$|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

   En prenant $\theta = -\omega_1 t$, cela correspond aux coefficients (B.3) and (B.4) avec les conditions initiales $a = 1$ et $b = 0$.

C.2 Oscillation de Rabi hors résonance

1. Dans le cas non résonant, montrer que l'on obtient à partir de (B.1) et (B.2) l'équation différentielle du second ordre pour $\hat{\lambda}(t)$

$$\frac{2}{\omega}\,\frac{d^2\hat{\lambda}}{dt^2} - \frac{2i}{\omega_1}\,\delta\,\frac{d\hat{\lambda}}{dt} + \frac{1}{2}\,\omega_1\,\hat{\lambda} = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \omega - \omega_0 \tag{C.1}$$

   dont on cherche des solutions de la forme

$$\hat{\lambda}(t) = e^{i\,\Omega_\pm\,t}$$

   Montrer que les valeurs de $\Omega_\pm$ sont les racines d'une équation du second degré qui sont données en fonction de la fréquence $\Omega = (\omega_1^2 + \delta^2)^{1/2}$ par

$$\Omega_\pm = \frac{1}{2}\Big(\delta \pm \Omega\Big)$$

   Solution : En substituant dans l'équation différentiel la forme exponentielle de $\hat{\lambda}(t)$, on obtient une équation du second ordre pour $\Omega_\pm$

$$2\Omega_\pm^2 - 2\delta\,\Omega_\pm - \frac{1}{2}\omega_1^2 = 0$$

   dont les solutions sont

$$\Omega_\pm = \frac{1}{2}\left[\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}\right] = \frac{1}{2}\,(\delta \pm \Omega)$$

2. La solution de (C.1) pour $\hat{\lambda}$ est une combinaison linéaire de $\exp(i\Omega_+ t)$ et $\exp(i\Omega_- t)$

$$\hat{\lambda}(t) = a\, e^{i\,\Omega_+\, t} + b\, e^{i\,\Omega_-\, t}$$

Choisissons les conditions initiales $\hat{\lambda}(0) = 1$ et $\hat{\mu}(0) = 0$. Comme $\hat{\mu}(0) \propto \frac{d\hat{\lambda}}{dt}(0)$, en déduire a et b en fonction de Ω et $\Omega_\pm$.

Solution : Ces conditions initiales sont équivalentes à

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad a\Omega_+ - b\Omega_- = 1 \qquad \text{soit} \qquad a = -\frac{\Omega_-}{\Omega} \quad \text{et} \quad b = \frac{\Omega_+}{\Omega}$$

3. Montrer que le résultat final se met sous la forme

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{e^{i\,\frac{\delta}{2}\,t}}{\Omega}\left[\Omega\,\cos\left(\frac{\Omega\,t}{2}\right) - i\delta\,\sin\left(\frac{\Omega\,t}{2}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \hat{\mu}(t) = \frac{i\omega_1}{\Omega}\,e^{-i\,\frac{\delta}{2}\,t}\,\sin\left(\frac{\Omega\,t}{2}\right)$$

qui se réduit bien à (B.3) et (B.4) lorsque $\delta = 0$. Si l'on part à $t = 0$ de l'état $|0\rangle$, quelle est la probabilité de trouver un spin dans l'état $|1\rangle$ au temps t ? Montrer que la probabilité maximale $\mathsf{P}_{\max}$ de transfert de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ pour $\frac{\Omega t}{2} = \frac{\pi}{2}$ est donner par une *courbe de résonnance* de largeur δ

$$\mathsf{P}_{\max} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \delta^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Tracer la courbe donnant $\mathsf{P}_{\max}$ en fonction de ω. Comme le montre la **Figure 4**, les oscillations de Rabi sont maximales à la résonance, et elles diminuent rapidement d'amplitude quand δ croît.

Solution : On prenant $a = -\frac{\Omega_-}{\Omega}$ et $b = \frac{\Omega_+}{\Omega}$ on obtient

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{e^{i\delta t/2}}{\Omega}\left[\Omega\,\cos\frac{\Omega t}{2} - i\delta\,\sin\frac{\Omega t}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \hat{\mu}(t) = \frac{i\omega_1}{\Omega}\,e^{-i\delta t/2}\,\sin\frac{\Omega t}{2}$$

qui se réduit à (B.3) et (B.4) lorsque $\delta = 0$. Le facteur $e^{\pm i\delta t/2}$ est présent car δ est la *fréquence de Larmor* dans un référentiel en rotation. La seconde équation montre que si on démarre à partir de l'état $|0\rangle$ à $t = 0$, la probabilité de trouver le spin dans l'état $|1\rangle$ au temps t est

$$\mathsf{p}_{0\to 1} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2}\,\sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

On voit que la probabilité maximum d'effectuer une transition de l'état $|0\rangle$ à l'état $|1\rangle$ pour $\Omega t/2 = \pi/2$ est donné par la courbe de résonance de largeur δ soit

$$\mathsf{p}_-^{\max} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \delta^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$