

B Exercices

B.1 Indépendance du produit tensoriel par rapport à la base

Supposons que l'on ait construit le produit tensoriel de deux espaces $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$ à partir de bases $\{|m_A\rangle\}$ et $\{|n_B\rangle\}$

$$|\varphi_A \otimes \chi_B\rangle = \sum_{m,n} c_m d_n |m_A \otimes n_B\rangle$$

Soit $|i_A\rangle$ et $|j_B\rangle$ deux autres bases orthonormées de $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$ déduites des bases $\{|m_A\rangle\}$ et $\{|n_B\rangle\}$ par des transformations unitaires respectives R ($R^{-1} = R^*$) et S ($S^{-1} = S^*$)

$$|i_A\rangle = \sum_m R_{im} |m_A\rangle \quad \text{et} \quad |j_B\rangle = \sum_n S_{jn} |n_B\rangle$$

Calculer le produit tensoriel $|i_A \otimes j_B\rangle$. Par ailleurs, on peut écrire la décomposition de $|\varphi\rangle$ et $|\chi\rangle$ dans les bases respectives $|i\rangle$ et $|j\rangle$

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^N \hat{c}_i |i_A\rangle \quad \text{et} \quad |\chi\rangle = \sum_{j=1}^N \hat{d}_j |j_B\rangle$$

Montrer que

$$\sum_{i,j} \hat{c}_i \hat{d}_j |i_A \otimes j_B\rangle = |\varphi \otimes \chi\rangle$$

Solution : Le produit tensoriel $|i \otimes j\rangle$ est donné par

$$|i_A \otimes j_B\rangle = \sum_{m,n} R_{im} S_{jn} |m_A \otimes n_B\rangle$$

Définissons l'état $|\varphi_A \otimes \chi_B\rangle'$ en utilisant la base $\{|i_A\rangle, |j_B\rangle\}$. Cela donne

$$|\varphi_A \otimes \chi_B\rangle' = \sum_{i,j} \hat{c}_i \hat{d}_j |i_A \otimes j_B\rangle = \sum_{i,j,m,n} \hat{c}_i \hat{d}_j R_{im} S_{jn} |m_A \otimes n_B\rangle$$

On peut maintenant effectuer une transformation pour changer de base

$$\hat{c}_i = \sum_k R_{ki}^{-1} c_k \quad \hat{d}_j = \sum_l S_{lj}^{-1} d_l$$

et montrer que

$$|\varphi_A \otimes \chi_B\rangle' = \sum_{m,n} c_m d_n |m_A \otimes n_B\rangle = |\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$$

Le produit tensoriel est donc indépendant du choix d'une base particulière.

B.2 Propriétés de l'opérateur d'état

1. Montrer à partir de

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad \sum_i p_i = 1$$

que l'opérateur d'état ρ le plus général doit avoir les propriétés suivantes :

- (a) Il doit être hermitien : $\rho = \rho^*$
- (b) Il doit être de trace unité : $\text{Tr} \rho = 1$
- (c) Il doit être positif : $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall |\varphi\rangle$

Montrer que la valeur moyenne d'une propriété physique $\mathcal{M}$ est

$$\langle \mathcal{M} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{M})$$

Solution : Comme la probabilité $\mathbf{p}_i$ est réelle, ρ est clairement un opérateur hermitien. De plus $\text{Tr} \rho = \sum_i \mathbf{p}_i = 1$, et finalement ρ est positif car

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle = \sum_i \mathbf{p}_i |\langle \varphi | i \rangle|^2 \geq 0$$

Calculons d'abord $\text{Tr}(\mathcal{M} |i\rangle \langle i|)$

$$\text{Tr}(\mathcal{M} |i\rangle \langle i|) = \sum_j \langle j | \mathcal{M} | i \rangle \langle i | j \rangle = \langle i | \mathcal{M} | i \rangle$$

d'où

$$\text{Tr} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \mathcal{M} |i\rangle \langle i| \right) = \sum_i \mathbf{p}_i \langle i | \mathcal{M} | i \rangle$$

La valeur moyenne (*expectation value*) de $\mathcal{M}$ dans l'état $|i\rangle$ apparait comme la somme sur i avec un poids $\mathbf{p}_i$, comme attendu.

2. Montrer de plus que si $\rho^2 = \rho$, alors tous les $\mathbf{p}_i$ sont nuls sauf un seul qui égal à un, et en déduire que la condition $\rho^2 = \rho$ est la condition nécessaire et suffisante pour un état pur.

Solution : Dans la base $|i\rangle$, ρ est diagonal avec les éléments de matrice $\rho_{ii} = \mathbf{p}_i$ de tel manière que $\rho^2 = \rho$ n'est possible que si l'une des probabilité est 1, car l'équation $\mathbf{p}_i^2 = \mathbf{p}_i$ a les solutions $\mathbf{p}_i = 1$ et $\mathbf{p}_i = 0$. De plus, $\text{Tr} \rho^2 = \sum_i \mathbf{p}_i^2 \leq \sum_i \mathbf{p}_i$ où l'égalité est réalisée si et seulement si une des probabilités $\mathbf{p}_i$ est égale à 1. Assumons, par exemple, que $\mathbf{p}_1 = 1$ et $\mathbf{p}_i = 0$ si $i \neq 1$. Alors $\rho = |1\rangle \langle 1|$, ce qui correspond l'état pur $|1\rangle$. On peut aussi remarquer que $\rho^2 = \rho$ implique que ρ est un projecteur $\mathcal{P}$, and le rang de ce projecteur est 1, car $\text{Tr} \mathcal{P}$ est la dimension du sous-espace sur lequel $\mathcal{P}$ projète.