TD 1

Ex1 Déterminer les fonctions caractéristiques dans les cas suivants :

1) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
2) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
3) X suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[-a, a]}$
4) X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ex2
Soit X_n une suite de variables aléatoires de densité $f_n(x) = \dfrac{n e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$

Montrer que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0$

Ex3 Soit X une v.a. de densité
$$f(x) = \exp(-x - e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X

2) Soit $Y = e^{-X}$.

déterminer la fonction de répartition de Y, puis sa densité

3) calculer $E(Y)$, $V(Y)$

4) Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un échantillon de Y c-à-d $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des v.a. indépendantes et de même loi que Y.

on pose $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$

a) Montrer que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 1$

b) Montrer que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{m.q} 1$?

l: limite qu'on précisera.

<u>Ex4</u> Soit X une v.a de loi γ_p. $(p \in \mathbb{N}^*)$.

1) Déterminer la fonction caractéristique de X

2) En déduire celle de $\frac{X - p}{\sqrt{p}}$.

Ex4 (suite)

3) Montrer que $\dfrac{X-p}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p \to +\infty]{L} N(0,1)$

Ex5

Soit X une V.a. normale centrée et réduite $X \hookrightarrow N(0,1)$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

(Utiliser Tchebychev).

Ex6 On considère une suite de V.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ distribuée suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\frac{1}{n})$ $(\lambda = \frac{1}{n})$

Montrer que X_n converge en loi vers la variable certaine $X=0$

$$\left(X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} 0\right)$$

Ex7

Soit X une v. a. suivant la loi exponentielle de paramètre ($\lambda > 0$)

1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \varepsilon^2}$$

2) En déduire que $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$.

Ex8

$(X_n)_{n>0}$ une suite de v. a. telle que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: X_n suit la loi géométrique $G\left(\frac{1}{n}\right)$ (de paramètre $\frac{1}{n}$).

On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1) Déterminer la fonction de répartition de la suite Y_n : $\mathbb{P}(Y_n \leq x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Montrer que $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} Y$

avec Y suit la loi Expo($\lambda = 1$)

Corrigé (TD 1)

Ex1

1) X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$

X est une somme indépendante de variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ où $X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ $\forall j = 1, \dots, n$

D'après le cours, on a calculé la fonction caractéristique de Bernoulli

$\varphi_{X_j}(t) = q + p e^{it}$ avec $q = 1-p$.

or les X_i sont indépendantes.

$\varphi_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = \boxed{(q + p e^{it})^n}$

__Remarque__ : comme 2e méthode on peut calculer directement $\varphi_X(t)$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \mathbb{P}(X=k)$

(6)

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k}$$

$$\varphi_X(t) = (1-p+pe^{it})^n \quad \text{(Newton)}$$

$$\boxed{\varphi_X(t) = (q+pe^{it})^n} \quad (q=1-p)$$

2) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ Poisson de paramètre λ.

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

<u>Rappel</u> $\sum_{0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$

Donc $\varphi_X(t) = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it})$

$$= \boxed{\exp(-\lambda + \lambda e^{it})}$$

3) $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-a,a]}$ (Loi uniforme sur $[-a,a]$)

Sa densité est $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \forall x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

X : var. continue

Donc $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itx}\,dx$

$\varphi_X(t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{ita} - e^{-ita}}{it}\right)$

$\Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{2i\sin(at)}{2ait} = \boxed{\frac{\sin(at)}{at}}$

4) $X \hookrightarrow N(0,1)$ (Loi normale centrée réduite)

En utilisant la formule de Mac-Laurin :

$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} i^k E(X^k)$ (cours) or $X \hookrightarrow N(0,1)$

$E(X^k) = 0$ si k impair

et $E(X^{2k}) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

Donc $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2k}}{(2k)!} i^{2k} \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Donc $\boxed{\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$

Ex2 X_n suite de V.a.

$f_n(x) = \dfrac{n e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$

on veut montrer que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0$

$\forall \varepsilon > 0$, montrons que

$P(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

9

Ex2 (suite)

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1-\mathbb{P}(|X_n|\leq \varepsilon)$$
$$= 1-\mathbb{P}(-\varepsilon\leq X_n \leq \varepsilon)$$
$$= 1-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}dx$$

$$\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1-\left[\frac{1}{1+e^{-nx}}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1-\frac{1}{1+e^{-n\varepsilon}}+\frac{1}{1+e^{n\varepsilon}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon) = 1-1+0 = 0.$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Ex3

X v.a. de densité

$$f(x) = \exp(-x-e^{-x})$$

1) $F(x) = \mathbb{P}(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

(10)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t} \cdot e^{-e^{-t}} \, dt = \left[e^{-e^{-t}} \right]_{-\infty}^{x} = e^{-e^{-x}}$$

(car $\left(e^{-e^{-t}}\right)' = e^{-t} e^{-e^{-t}}$)

$$\boxed{F(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)}$$

2) $Y = e^{-X}$

Soit $G(y)$ la f.d.r (fonction de répartition) de Y.

Y étant positive donc $G(y) = P(Y < y) = 0$ pour $y \leq 0$

Pour $y > 0$

$G(y) = P(Y < y) = P(e^{-X} < y) = P(-X < \ln y)$

$G(y) = P(X > -\ln y) = 1 - F(-\ln y)$

$G(y) = 1 - F(-\ln y) = 1 - e^{-y}$

Donc $G(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$

Ex3 (suite)

La densité de $Y = e^{-X}$ est :

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

3) $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y\, g(y)\, dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy$

on intègre par partie : $\begin{cases} v = y & v' = 1 \\ u' = e^{-y} & u = -e^{-y} \end{cases}$

$$E(Y) = \underbrace{\left[-y e^{-y}\right]_0^{+\infty}}_{\substack{\to 0 \\ y \to +\infty}} - \int_0^{+\infty} (-e^{-y})\, dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\boxed{E(Y) = 1}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\, dy.$$

Int/partie : $\begin{cases} v = y^2 & v' = 2y \\ u' = e^{-y} & u = -e^{-y} \end{cases}$

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \left[-y^2 e^{-y}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2y(-e^{-y}) dy$$

$$\left[-y^2 e^{-y}\right]_0^{+\infty} \xrightarrow{(y \to +\infty)} 0$$

$$E(Y^2) = 2 \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = 2E(Y) = 2$$

Donc $V(Y) = 2 - 1 = \boxed{1}$

4) a) $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et même loi que Y.

$$E(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1$$

$$V(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

En utilisant Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \ P\left(\left|\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)\right| > \varepsilon\right) < \frac{V(\overline{Y}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\overline{Y}_n - 1\right| > \varepsilon\right) < \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\overline{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 1$

5) Montrons que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{m.q} 1$?

$$E\left(|\overline{Y}_n - 1|^2\right) = E\left(|\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)|^2\right)$$
$$= V(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\overline{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{m.q} 1$

Ex4

X suit la loi γ_p. (gamma)

Sa densité est $f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} e^{-x} \cdot x^{p-1}$

Donc $\varphi_X(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-x} \cdot x^{p-1} dx$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x} \cdot x^{p-1} dx.$$

Posons $I_{p-1} = \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x} \cdot x^{p-1} dx$

(1a)

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}\,dx = \left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{it-1}$$

car $e^{(it-1)x} = e^{itx}.e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

puisque $|e^{itx}|=1$ (bornée)

$$I_{p-1} = \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}.\,x^{p-1}\,dx.$$

on intègre par partie : $\left\{\begin{array}{l} u' = e^{(it-1)x} \\ v = x^{p-1}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{(it-1)} e^{(it-1)x} \\ v' = (p-1)\,x^{p-2}\end{array}\right.$

$$I_{p-1} = \left[\underbrace{\frac{e^{(it-1)x}}{(it-1)}.\,x^{p-1}}_{\xrightarrow[(x\to+\infty)]{} 0}\right]_0^{+\infty} - \frac{(p-1)}{it-1}\int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}.\,x^{p-2}\,dx$$

car $\underbrace{e^{itx}}_{\text{bornée}}.e^{-x}.x^{p-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$|e^{itx}|=1$

$$\begin{cases} I_{p-1} = -\dfrac{(p-1)}{it-1} I_{p-2} \quad \forall p \geq 2 \\ I_{p-2} = -\dfrac{(p-2)}{it-1} \cdot I_{p-3} \\ \vdots \\ I_2 = -\dfrac{2}{it-1} \cdot I_1 \\ I_1 = -\dfrac{1}{it-1} \cdot I_0 \end{cases}$$

En faisant le produit :

$$I_{p-1} = \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(it-1)^{p-1}} \cdot I_0 = \frac{(-1)^p (p-1)!}{(it-1)^p}$$

$$\boxed{I_{p-1} = \frac{(-1)^p (p-1)!}{(it-1)^p}}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} I_{p-1} = \frac{(-1)^p}{(it-1)^p} = (1-it)^{-p}$$

$$\boxed{\varphi_X(t) = (1-it)^{-p}}$$

(T6)

2) on veut la fonction caractéristique de $\frac{X-p}{\sqrt{p}}$.

or, d'après le cours :

$$\varphi_{\frac{X-m}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{itm}{\sigma}} \varphi_X(t/\sigma).$$

ici $m = p$ et $\sigma = \sqrt{p}$.

Donc $\varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) = e^{-\frac{itp}{\sqrt{p}}} \varphi_X(t/\sqrt{p})$

$$= e^{-\frac{itp}{\sqrt{p}}} \varphi_X(t/\sqrt{p})$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) = e^{-itp/\sqrt{p}} \cdot (1 - it/\sqrt{p})^{-p}}$$

3) Montrons que $\frac{X-p}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p \to +\infty]{L} N(0,1)$

$$\ln \varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) = -\frac{itp}{\sqrt{p}} - p \ln(1 - it/\sqrt{p})$$

or $\ln(1+x) \underset{\text{au vois}(0)}{\sim} x - \frac{x^2}{2}$

Donc $\ln \varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) \simeq -\frac{itp}{\sqrt{p}} - p\left(-\frac{it}{\sqrt{p}} + \frac{t^2}{2p}\right)$

pour p au voisinage de $+\infty$

$\ln \varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) \simeq -\frac{itp}{\sqrt{p}} + \frac{itp}{\sqrt{p}} - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2}$

$\ln \varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) \simeq -\frac{t^2}{2}$ (p au vois $+\infty$)

$\Rightarrow \varphi_{\frac{X-p}{\sqrt{p}}}(t) \simeq e^{-\frac{t^2}{2}}$: fonction caractéristique de $N(0,1)$

<u>Conclusion</u> $\frac{X-p}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p \to +\infty]{L} N(0,1)$

Ex 5

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (Loi normale centrée réduite)

D'après l'inégalité de Tchebychev :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

or $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$

et $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X| < \varepsilon)$

Ça permet d'écrire : $\mathbb{P}(|X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$

c-à-d $\mathbb{P}(-\varepsilon < X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$

F : (f. d. r de $\mathcal{N}(0,1)$) $\quad F(\varepsilon) - F(-\varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$

$F(\varepsilon) - (1 - F(\varepsilon)) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0.$

$\Rightarrow \boxed{2F(\varepsilon) - 1 \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}$ $(*)$

On a aussi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(x) - \underbrace{F(0)}_{1/2}$

$\forall x > 0$

$\Rightarrow \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\left(F(x) - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(2F(x) - 1\right) \quad \forall x > 0$

Grâce à l'inégalité (*) et en remplaçant ε par x.

on obtient $\forall x > 0$

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}\left(2F(x) - 1\right) \geq \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

on a bien $\boxed{\forall x > 0, \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$

<u>Ex 6</u> $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$

<u>Rappel</u> $P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ (avec $\lambda = \frac{1}{n}$)

$$P(X_n = k) = e^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n^k k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

si $k = 0$, $P(X_n = 0) = e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

si $k \geq 1$

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n^k k!} e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Conclusion : on a montré que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = 1 = P(X=0) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = 0 = P(X=k) \quad \forall k \geq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} X = 0$$

v.a.r certain

Ex7

X suit la loi expo(λ) de paramètre λ

1) on rappelle que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

En appliquant l'inégalité Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

2) L'évènement :

$$\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) = \left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \varepsilon\right) \cup \left(X - \frac{1}{\lambda} \leq -\varepsilon\right)$$

or $A \subset A \cup B$

donc $\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \varepsilon\right) \subset \left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right)$

On en déduit, par croissance de la probabilité

$$\mathbb{P}\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \varepsilon^2}$$ (D'après la 1re question)

En choisissant $\varepsilon = \frac{2}{\lambda} > 0$

on obtient $\boxed{\mathbb{P}\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}}$

<u>EX8</u>

$(X_n)_{n>0}$ une suite de v.a. géométrique $G\left(\frac{1}{n}\right)$

avec $p = \frac{1}{n}$ paramètre

<u>Rappel</u> $\mathbb{P}(X_n = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad \forall k \geq 1$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}$$

1) On veut déterminer la fonction de répartition de Y_n

$\forall x \leq 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X_n \leq nx) = 0$ (car $nx \leq 0$)

<u>Rq</u>

donc $\forall x \leq 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = 0$

$\forall x > 0$ (réel strictement positif)

Dès que n est assez grand, $nx \geq 1$

$P(Y_n \leq x) = P(X_n \leq nx) = \sum_{k=1}^{[nx]} P(X_n = k)$

($[nx]$ partie entière de nx)

$\forall x > 0$, $P(Y_n \leq x) = \sum_{k=1}^{[nx]} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}$

$P(Y_n \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nx]} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n} \left(\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nx]}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right)$

$$\boxed{P(Y_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nx]}}$$

Donc

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nx]} & x > 0 \end{cases}$$

fonction de répartition de Y_n.

2) On a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{[nx]} = \exp\left([nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}}$ (n au voisinage de $+\infty$)

$\left(\ln(1+x) \sim x\right.$ (au voisinage de 0$\left.)\right)$

Par définition de la partie entière :

$$[nx] \leq nx < [nx]+1$$

$$nx-1 < [nx] \leq nx$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{nx} < \frac{[nx]}{nx} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{[nx]}{nx} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{[nx] \sim nx} \quad (n \text{ au vois de } +\infty)$$

Donc $[nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim nx\left(-\frac{1}{n}\right) = -x$.

$$\exp\left([nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \sim e^{-x}.$$

(n au vois $+\infty$)

$\forall x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x) = 1-e^{-x}.$$

2)

On a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{[nx]} = \exp\left([nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}}$ (n au voisinage de $+\infty$)

$\left(\ln(1+x) \sim x \text{ (au voisinage de 0)}\right)$

Par définition de la partie entière :

$$[nx] \leq nx < [nx]+1$$

$$nx-1 < [nx] \leq nx$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{nx} < \frac{[nx]}{nx} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{[nx]}{nx} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{[nx] \sim nx} \text{ (n au vois de } +\infty)$$

Donc $[nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim nx\left(-\frac{1}{n}\right) = -x$.

$$\exp\left([nx]\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \sim e^{-x}.$$

$\left(\text{n au vois } +\infty\right)$

$\forall x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq x) = 1-e^{-x}.$$

<u>Conclusion</u>

$\forall x \leq 0 \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = 0$

et

$\forall x > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x) = 1 - e^{-x}$

or $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ est la fonction de répartition de la loi expo($\lambda = 1$)