

Ex 9

Une usine fabrique des pièces, dont 3% ont des défauts.

- 1) On prélève 1000 pièces au hasard.
 - a) Quelle est la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses?
 - b) Quelle est la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses?

- 2) On veut 1950 pièces sans défaut.

Par prudence, on en prélève 2000 au hasard.
Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de pièces en bon état?

Ex 10

Le nombre de pannes, par mois, sur une certaine machine, suit une loi de Poisson de moyenne égale à 3. Un atelier fonctionne avec 12 machines de ce type, indépendantes.
En un mois, quelle est la probabilité de constater dans cet atelier:

- 1) plus de 42 pages?
- 2) entre 36 et 45 pages?

EXM On jette 600 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le nombre d'apparitions de 1 (face marquée 1)

- 1) Quelle est la loi de X ?
- 2) calculer $E(X)$ et $V(X)$
- 3) calculer $P(X > 110)$
- 4) Déterminer un intervalle $[a, b]$ centré sur $E(X)$ tel que $P(a \leq X \leq b) = 0,95$.

EX12

$X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de loi de Poisson $P(\lambda=1)$

Soit $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$

- 1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq n)$ (utiliser la th. Central Limit)
- 2) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$

Ex 13 Une entreprise compte 300 employés chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025.

Ex 14

On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ d'une v.a. X .

Déterminer le vrai) ensemble de cet échantillon dans les cas où X est distribuée suivant:

- 1) une loi binomiale $B(N, p)$
- 2) une loi de Poisson $P(\lambda)$
- 3) une loi exponentielle $E(\lambda)$.
- 4) une loi normale $N(\mu, \sigma)$

EX 15

Soit X une V.A. qui suit la loi normale centrée, de variance σ^2 inconnue.

($\sigma > 0$). $\forall n \geq 2$, on dispose d'un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de Variables indépendantes et de même

loi que X .

$$\text{Soit } S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de σ^2

2) Montrer que S_n converge en probabilité vers σ^2 .

Ex 9

1) Soit X la v.a. : nombre de pièces défectueuses parmi 1000.

X suit la loi $B(n, p)$ avec $n=1000$
 $p=0,03$

$$B(n, p) \simeq N(np, \sqrt{npq})$$

$$\text{Donc } \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{Z} N(0, 1) \quad (\text{th Moivre-Laplace})$$

$$np = 30$$

$$npq = 29,1$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{29,1} = 5,4$$

$$\begin{aligned} a) P(X > 50) &= 1 - P(X \leq 50) \\ &\simeq 1 - P\left(U \leq \frac{50 - 30 + 0,5}{5,4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{avec } U = \frac{X - 30}{5,4} \simeq N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(X > 50) &\simeq 1 - P(U \leq 3,8) \\ &\simeq 1 - F(3,8) = 1 - 0,9999 \simeq 0 \end{aligned}$$

$$b) P(20 \leq X \leq 40) \simeq P\left(\frac{20-30}{5,4} \leq U \leq \frac{40-30}{5,4}\right)$$

$$\text{avec } U = \frac{X-30}{5,4} \rightarrow N(0,1)$$

$$P(20 \leq X \leq 40) = P(-1,94 \leq U \leq 1,94)$$

$$= F(1,94) - F(-1,94)$$

$$= F(1,94) - (1 - F(1,94))$$

$$= 2F(1,94) - 1 = 2 \times 0,9738 - 1 = 0,9476$$

(table de $N(0,1)$)

F: fonction
de répartition
de $N(0,1)$

$$2) X \rightarrow B(2000; p=0,03) \quad n=2000$$

$$np=60, \quad npq=58,2, \quad \sqrt{npq}=7,63$$

$$B(2000; 0,03) \simeq N(60; 7,63)$$

on veut 1950 pièces en bon état.

$$\text{donc } P(X \leq 190) = P\left(\frac{X-60}{7,63} \leq \frac{190-60}{7,63}\right)$$

$$U = \frac{X-60}{7,63} \rightarrow N(0,1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } P(X \leq 50) &= P(U \leq -1,25) \\
 &= F(-1,25) \\
 &= 1 - F(1,25) \\
 &= 1 - 0,8944 = \boxed{0,1056}
 \end{aligned}$$

Ex 10

Soit X_i v.a: nombre de pannes, en un mois de la machine n°i

$$X_i \rightarrow \mathcal{P}(3)$$

$$\text{Soit } S_{12} = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$$

S_{12} : nombre de pannes dans l'atelier

(X_i) sont indépendants

$$\text{donc } S_n = \sum_{i=1}^{12} X_i \rightarrow \mathcal{P}(12 \times 3) = \mathcal{P}(36)$$

$$S_n \rightarrow \mathcal{P}(36) \quad \lambda = 36 > 20$$

on peut approximer cette loi par la loi normale:

$$\frac{S_n - 36}{\sqrt{36}} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

1) on cherche $P(S_{12} > 42)$

$$\begin{aligned}
 P(S_{12} > 42) &= P\left(\frac{S_{12} - 36}{6} > \frac{42 - 36}{6}\right) \\
 &= P\left(\frac{S_{12} - 36}{6} > 1\right) \\
 &= 1 - P(U < 1) \\
 &= 1 - F(1) \text{ avec } U = \frac{S_{12} - 36}{6} \\
 &= 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) P(36 < S_{12} < 45) &= P\left(0 < \frac{S_{12} - 36}{6} < \frac{3}{2}\right) \\
 &= F(1,5) - F(0) \\
 &= 0,9332 - 0,5 = \boxed{0,4332}
 \end{aligned}$$

Ex II

$$1) X \sim B(n, p) \quad \left. \begin{array}{l} n = 600 \\ p = 1/6 \end{array} \right\}$$

$$2) E(X) = np = 100, \quad \sigma(X) = \sqrt{100 \times \frac{5}{6}} = 9,13$$

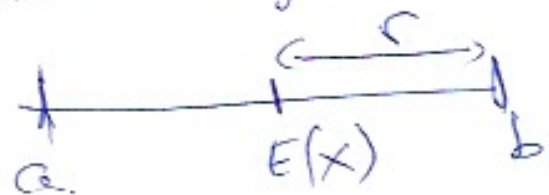
$$\begin{aligned}
 3) P(X > 110) &= P\left(\frac{X - 100}{9,13} > \frac{110 - 100}{9,13}\right) \\
 &= P\left(U > \frac{110 - 100 + 0,5}{9,13}\right)
 \end{aligned}$$

$$P(U > 1,15) \text{ avec } U = \frac{X-100}{9,13} \sim N(0,1) \\ = 1 - F(1,15)$$

Donc $P(X > 110) = 1 - 0,8749 = 0,13$

$$\boxed{P(X > 110) = 0,13}$$

4) Soit r : rayon de l'intervalle



$$\begin{cases} a = E(X) - r \\ b = E(X) + r \end{cases}$$

on cherche r tel que

$$P(|X - 100| \leq r) = 0,95$$

Donc $U = \frac{X-100}{9,13}$

$$\Rightarrow P(|X - 100| \leq r) = P\left(|U| \leq \frac{r+0,5}{9,13}\right)$$

$$P\left(\frac{-r-0,5}{9,13} \leq U \leq \frac{r+0,5}{9,13}\right) = 0,95$$

$$F\left(\frac{r+0,5}{9,13}\right) - F\left(\frac{-r-0,5}{9,13}\right) = 0,95$$

$$2F\left(\frac{r+0,5}{9,13}\right) - 1 = 0,95$$

$$F\left(\frac{r+0,5}{9,13}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

$$\text{table } \frac{r+0,5}{9,13} = 1,96$$

$$\Rightarrow r = 1,96 \times 9,13 - 0,5$$

$$r = 17,33$$

$$\text{donc } \begin{cases} a = 100 - 17,33 = 82,61 \\ b = 100 + 17,33 = 117,33 \end{cases}$$

$$I = [82,61; 117,33]$$

EX 12

1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des V.a. indépendantes et de même loi, donc d'après le théorème

Central-limite: $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$

$$\begin{cases} Y_n = \sum_{i=1}^n X_i, & E(Y_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n \\ V(Y_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n \Rightarrow \sigma = \sqrt{n} \end{cases}$$

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$$

$$P(Y_n \leq n) = P\left(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = F_n(0)$$

où F_n est la fonction de répartition de $\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$

$$\text{or } \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(0) = \Phi(0) \xrightarrow{\text{f.d.c. de } N(0,1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq n) = \frac{1}{2}}$$

2) D'autre part, la somme de n v.a. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{suit}} \mathcal{P}(n)$$

$$P(Y_n \leq n) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-n} n^k}{k!} = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

$$\text{D'après la 1}^{\text{e}}) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 1/2$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \sim \frac{1}{2} e^n} \quad (n \text{ grand})$$

Ex 13

Soit N le nombre de lignes installées dans l'entreprise.

Soit X le nombre d'employés qui téléphonent à un instant t .

On cherche N tel que $P(X \geq N) \leq 0,025$

La probabilité pour qu'un employé téléphone à l'instant t est $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

$$X \rightarrow B(300, \frac{1}{10})$$

$$B(300, \frac{1}{10}) \approx N(30, \sqrt{27})$$

(th Moivre-Laplace)

et

$$U = \frac{X - 30}{\sqrt{27}} \approx N(0, 1)$$

$$P(X \geq N) \leq 0,025$$

$$= P\left(U \geq \frac{N-30}{3\sqrt{3}}\right) \leq 0,025$$

$$1 - \Phi\left(\frac{N-30+0,5}{3\sqrt{3}}\right) \leq 0,025$$

$$\Phi\left(\frac{N-30+0,5}{3\sqrt{3}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96)$$

où Φ est la f.d.s. de la loi $N(0,1)$

$$\Leftrightarrow \frac{N-30+0,5}{3\sqrt{3}} \geq 1,96$$

$$\Leftrightarrow N \geq 3\sqrt{3} \times 1,96 + 29,5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N \geq 40}$$

Il faut donc installer au moins 40 lignes

Rappels des lois usuelles

(1)

1) Lois discrètes

a) Loi discrète uniforme

$$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$P(X=k) = \frac{1}{n} \quad \forall k=1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

b) Loi de Bernoulli de paramètre p : $B(p)$

X ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p = q$$

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p)$$

c) Loi binomiale $B(n, p)$

$X = \sum_{i=1}^n X_i$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\forall k \in [0, n]$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\boxed{E(X) = np} \text{ et } \boxed{V(X) = npq} \quad q = 1-p$$

d) Loi de Poisson: $P(\lambda)$ (λ paramètre)

$$\boxed{P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

e) Loi géométrique de paramètre: $G(p)$

$$\boxed{P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\boxed{E(X) = 1/p}, \quad \boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

e) Lois continues usuelles

a) Loi uniforme sur $[a, b]$

La densité est $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \forall x \in [a, b] \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b) Loi exponentielle de paramètre λ

La densité est $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \lambda x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

c) Loi gamma de paramètre $r: \delta(r)$

La densité est $f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-x} x^{r-1} \quad \forall x > 0$

$$E(X) = V(X) = r$$

d) Loi normale $N(m, \sigma)$

Sa densité est $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{E(X) = m}, \quad \boxed{V(X) = \sigma^2}$$

σ : écart-type.

Posons $U = \frac{X-m}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$

U est une loi normale centrée et réduite

Sa densité est $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$

Rappels de quelques développements limités

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad (\text{à l'ordre 2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (\text{à l'ordre 2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2) \quad (\text{à l'ordre 2})$$

$(\alpha \in \mathbb{R})$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (\text{à l'ordre 3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad (\text{à l'ordre 2})$$

Ex 14 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de X

(14)

1) $X \rightarrow B(N, p)$ ($\theta = p$ paramètre)

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{N!}{x_i! (N-x_i)!} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i} \end{aligned}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \frac{(N!)^n}{\prod_{i=1}^n x_i! (N-x_i)!} p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nN - \sum_{i=1}^n x_i}$$

2) $X \rightarrow P(\lambda)$ ($\theta = \lambda$ paramètre)

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \end{aligned}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

3) $X \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (Exponentielle) (Variable continue) (11)
 $\theta = \lambda$ (paramètre)

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

4) $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Variable continue)
 paramètres μ et σ :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

$$\text{or } f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \text{ (densité)}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

EX15

X v.a. normale centrée $X \sim N(0, \sigma)$

σ : inconnue.

$(X_1, \dots, X_n)$ échantillon de X

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1) $\forall i, X_i$ suit la loi $N(0, \sigma)$: $V(X_i) = E(X_i^2)$

$$\text{donc } E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

$$\Rightarrow E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E(S_n) = \sigma^2} \quad (\text{sans biais})$$

2) Convergence de S_n ?

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i^2) = \frac{n}{n^2} V(X^2)$$

$$V(S_n) = \frac{V(X^2)}{n} = \frac{C}{n} \quad (C = V(X^2))$$

$$\Rightarrow V(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'après l'ingétabilité de Tchebychev:

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|S_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } \boxed{S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2}$$