

ASE 3 Entrainement

Exercice 1 (Annales 2019 Rattrapages):

On dispose de 6 boîtes numérotées de 1 à 6.

La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k , On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

- Déterminer la loi du couple (X, Y) .

$$1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq 6$$

X/Y	1	k	6	$P(X = i)$
1	$\frac{1}{6k}$	0	0	$\frac{1}{6}$
i	$\frac{1}{6i}$	$\frac{1}{6i}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
				1

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \frac{1}{6i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Calculer la probabilité de $P(X=Y)$

$$P(X = Y) = \frac{49}{120} = 0.41$$

- Déterminer la loi de Y

$$P(Y = j) = \frac{1}{6} \sum_{i=j}^6 \frac{1}{i}$$

- Espérance de Y

$$E(Y) = \sum_{j=1}^6 P(Y = j) = \frac{9}{4} = 2.25$$

Exercice 2 (Annales 2020):

On considère un nombre entier n supérieur ou égal à 2 et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On extrait de cette urne successivement et sans remise deux jetons et on désigne alors par X_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré et X_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la probabilité $P(X_1 = i) \forall i \in [[1, n]]$

$$P(X_1 = i) = \frac{1}{n}$$

2. Déterminer la probabilité $P_{(X_1=i)}(X_2 = j) \forall (i, j) \in [[1, n]]^2$

$$P_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

3. Calculer la probabilité de $P(X_2 = j) \forall j \in [[1, n]]$

X/Y	1	j	n
1	0	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$
i	$\frac{1}{n(n-1)}$	0	$\frac{1}{n(n-1)}$
n	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$	0

On obtient à l'aide du tableau $P(X_2 = j) = \frac{1}{n}$

Donc X_1 et X_2 suivent la même loi (Loi uniforme).

4. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Covariance.

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} - \frac{1}{3}$$

Exercice 3 (Annales 2020) :

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_i = \frac{1}{6} \quad \forall i = 1, \dots, 6$$

1. Calculer les moyennes de chaque variable et en déduire le centre de gravité.

$$\overline{X^{(1)}} = \sum_{i=1}^6 p_i X_i^{(1)} = 3$$

$$\overline{X^{(2)}} = 1$$

$$\overline{X^{(3)}} = 2$$

$$g = (3, 1, 2)$$

2. Calculer la matrice des données centrées Y

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

3. $V = Y^T D Y$

$$V = \frac{1}{6} Y^T Y$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 64 & -8 & -8 \\ -8 & 34 & 22 \\ -8 & 22 & 34 \end{pmatrix}$$

4. $P_\lambda(V) = \det(V - \lambda I_3)$

$$P_\lambda(V) = \begin{vmatrix} \frac{64}{6} - \lambda & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ -\frac{8}{6} & \frac{34}{6} - \lambda & \frac{22}{6} \\ -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} & \frac{34}{6} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$P_\lambda(V) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ 8-\lambda & \frac{34}{6}-\lambda & \frac{22}{6} \\ 8-\lambda & \frac{22}{6} & \frac{34}{6}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_\lambda(V) = (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ 1 & \frac{34}{6}-\lambda & \frac{22}{6} \\ 1 & \frac{22}{6} & \frac{34}{6}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \rightarrow L_3 - L_1$$

$$P_\lambda(V) = (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ 0 & 7-\lambda & 5 \\ 0 & 5 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_\lambda(V) = (8-\lambda)((7-\lambda)^2 - 25)$$

$$P_\lambda(V) = (12-\lambda)(8-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 2$$

Pourcentage d'inertie :

$$\text{Sur le 1}^{\text{er}} \text{ axe : } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{6}{11} = 55\%$$

$$\text{Sur le 2}^{\text{ème}} \text{ axe : } \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 36\%$$

$$\text{Sur le 3}^{\text{ème}} \text{ axe : } \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 9\%$$

$$\text{Plan factoriel : } \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 91\%$$

5. Déterminer les deux facteurs principaux associés à λ_1 et λ_2

λ_1 :

$$E_{12} = \text{Ker}(V - 12I_3)$$

$$(V - 12I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} & \frac{34}{6} & \frac{22}{6} \\ -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} & \frac{34}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{6}x - \frac{8}{6}y - \frac{8}{6}z = 0 \\ \frac{8}{6}x - \frac{38}{6}y + \frac{22}{6}z = 0 \\ -\frac{8}{6}x + \frac{22}{6}y - \frac{38}{6}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \quad (1) \\ -8x - 38y + 22z = 0 \quad (2) \\ -8x + 22y - 38z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -60y + 60z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

$$(1) \Rightarrow x + 2z = 0 \Leftrightarrow x = -2z$$

$$E_{12} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ Droite}$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Normée}$$

$\lambda_2 :$

$$E_8 = \text{Ker}(V - 8I_3)$$

$$(V - 8I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{6} & -\frac{8}{6} & -\frac{8}{6} \\ \frac{8}{6} & \frac{14}{6} & \frac{22}{6} \\ -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} & \frac{14}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{6}x - \frac{8}{6}y - \frac{8}{6}z = 0 \\ \frac{8}{6}x - \frac{14}{6}y + \frac{22}{6}z = 0 \\ -\frac{8}{6}x + \frac{22}{6}y - \frac{14}{6}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \quad (1) \\ -8x - 14y + 22z = 0 \quad (2) \\ -8x + 22y - 14z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -36y + 36z = 0 \Rightarrow y = z$$

$$(1) \Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$E_8 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ Droite}$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Normée}$$

Base orthonormée $(u^{(1)}, u^{(2)})$

6. Composantes principales

$$C^{(i)} = Y u^{(i)} \quad i = 1 \text{ et } 2$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

7. Coefficients de corrélation

$$\rho(X^{(j)}, C^{(i)}) = \frac{Cov(X^{(j)}, C^{(i)})}{\sigma_{X^{(j)}} \sigma_{C^{(i)}}}$$

$$Cov(X^{(1)}, C^{(1)}) = \langle y^{(1)}, C^{(1)} \rangle = y^{(1)T} D C^{(1)}$$

$$Cov(X^{(2)}, C^{(1)}) = 0$$

$$Cov(X^{(3)}, C^{(1)}) = -\frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$Cov(X^{(1)}, C^{(2)}) = \frac{16\sqrt{3}}{6}$$

$$Cov(X^{(2)}, C^{(2)}) = \frac{16\sqrt{3}}{6}$$

$$Cov(X^{(3)}, C^{(2)}) = \frac{16\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{-16}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma_{X^{(1)}} = \sqrt{V(X^{(1)})} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma_{X^{(2)}} = \sqrt{V(X^{(2)})} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sigma_{X^{(3)}}$$

$$\sigma_{\mathcal{C}^{(1)}} = \sqrt{\mathcal{C}^{(1)T} D \mathcal{C}^{(1)}} = \sqrt{12}$$

$$\sigma_{\mathcal{C}^{(2)}} = \sqrt{\mathcal{C}^{(2)T} D \mathcal{C}^{(2)}} = \sqrt{8}$$

$$\rho(X^{(1)}, \mathcal{C}^{(1)}) = -0.58$$

$$\rho(X^{(2)}, \mathcal{C}^{(1)}) = 0$$

$$\rho(X^{(3)}, \mathcal{C}^{(1)}) = -0.40$$

$$\rho(X^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) = 0.5$$

$$\rho(X^{(2)}, \mathcal{C}^{(2)}) = 0.69$$

$$\rho(X^{(3)}, \mathcal{C}^{(2)}) = 0.69$$