

ASE3
2021

Exo 1.

$$n \geq 2$$

urne de n jetons

X_1 : ^{va.} le numéro du 1^{er} jeton

X_2 : ^{va.} le numéro du 2^{ème} jeton

① Déterminer la probabilité $P(X_1 = i) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$P(X_1 = i) = \frac{1}{n} \quad \text{car il y a } n \text{ jetons dans l'urne}$$

② Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X_1=i)}(X_2 = j)$

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$$

$$P_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \begin{cases} \frac{P((X_1=i) \cap (X_2=j))}{P(X_1=i)} \\ \frac{1}{n-1} & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } i=j \end{cases}$$

③ En déduire la probabilité $P(X_2 = j) \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$
puis comparer les lois X_1 et X_2

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_i P_{i,j} = \sum_i P((X_1=i) \cap (X_2=j)) \\ &= \sum_i P_{(X_1=i)}(X_2=j) P(X_1=i) \\ &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} + \underbrace{P((X_1=j) \cap (X_2=j))}_0 \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

X_1 et X_2 sont de même loi

④ Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x_j)) \\ &= P(X_1 = x_i) \times P_{(X_1 = x_i)}(X_2 = x_j) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

⑤ Calculer la covariance $\text{Cov}(X_1, X_2)$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1) E(X_2)$$

$$= \sum_{i,j} i, j P_{i,j} - \underbrace{\left(\frac{1+n}{2}\right)^2}_{\text{loi uniforme } [1, 2]}$$

$$\sum_{i,j} x_i x_j P_{i,j} = \sum_i i \sum_{j; j \neq i}^n j P_{i,j}$$

$$= \sum_i i \sum_j \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= \sum_i i \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_j j - i \right)$$

$$\sum_j j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^n i \frac{n(n+1)}{2n(n-1)} - \sum_{i=1}^n i^2 \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4n(n-1)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n(n-1)}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{12n(n-1)}$$

$$= \frac{3n(n+1)^2 - 2(n+1)(2n+1)}{12(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{12(n-1)} (3n(n+1) - 2(2n+1))$$

$$(3n^2 + 3n - 4n - 2)$$

$$= \frac{(n+1)}{12(n-1)} (3n^2 - n - 2)$$

$$= \frac{(n+1)}{12} (3n+2) \cancel{(n-1)}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(1+n)^2}{4}$$

$$= -\frac{n+1}{12}$$

Exo 2 (Version 1):

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\text{individus}} = I_6$$

$$M_{\text{variable}} = \frac{1}{6} I_3$$

$$P_i = \frac{1}{6} \quad \forall i$$

- ① Calculer la moyenne de chaque variable et en déduire le centre de gravité du nuage formé par les six individus

$$\overline{X^{(1)}} = \frac{1}{6} (5 + 1 + 3 + 7 + 5 + 3) = 18/6 = 3$$

$$\overline{X^{(2)}} = \frac{1}{6} (-2 + 3 + 5 + 1 - 1) = 1$$

$$\overline{X^{(3)}} = \frac{1}{6} (-3 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3) = 12/6 = 2$$

$$t_g = (3, 1, 2)$$

- ② Calculer la matrice des données centrées Y

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ Calculer la matrice de variance-covariance V

$$V = {}^t Y D Y = \frac{1}{6} {}^t Y Y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & -8 & -8 \\ -8 & 34 & 22 \\ -8 & 22 & 34 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 64 & -8 & -8 \\ -8 & 34 & 22 \\ -8 & 22 & 34 \end{pmatrix}$$

④ Déterminer les valeurs propres de la matrice V et calculer le pourcentage d'inertie

étape 1 : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$PV = \begin{pmatrix} 8-\lambda & -8/6 & -8/6 \\ 8-\lambda & 34/6-\lambda & 22 \\ 8-\lambda & 22/6 & 34/6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$PV = \det(V - \lambda I_3)$$

$$\Rightarrow (8-\lambda) \begin{pmatrix} 1 & -8/6 & -8/6 \\ 1 & 34/6-\lambda & 22 \\ 1 & 22/6 & 34/6-\lambda \end{pmatrix}$$

etape 2 $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Rightarrow (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -8/6 & -8/6 \\ 0 & 42/6-\lambda & 30/6 \\ 0 & 36/6 & 42/6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0 (8-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -8/6 & -8/6 \\ 0 & 7-\lambda & 5 \\ 0 & 5 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

On determine le polynôme

$$(8-\lambda) ((7-\lambda)^2 - 5^2)$$

$$= (8-\lambda) (49 - 14\lambda + \lambda^2 - 25)$$

$$= (8-\lambda) (24 - 14\lambda + \lambda^2)$$

il faut trouver les racines

Rappel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 14^2 - 4 \times 24 = 196 - 96 = 100 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10$$

$$x_1 = \frac{14 + 10}{2} = 12 \quad x_2 = \frac{14 - 10}{2} = 2$$

$$D = (8-\lambda) (12-\lambda) (2-\lambda)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 12$ et $\lambda_3 = 2$

Calcul du pourcentage d'inertie

$$\text{sur l'axe 1: } \frac{8}{8+12+2} = 36,36\% \text{ d'inertie}$$

$$\text{sur l'axe 2: } \frac{12}{22} = 54,54\% \text{ d'inertie}$$

$$\text{sur l'axe 3: } \frac{2}{22} = 9,09\% \text{ d'inertie}$$

⑤ Déterminer les deux facteurs principaux associés aux deux plus grandes valeurs propres

$$\text{Ker}(V - 12I_3)$$

$$V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 & -4 & -4 \\ -4 & 17 & 11 \\ -4 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

$$V - 12I_3 = \begin{pmatrix} -4/3 & -4/3 & -4/3 \\ -4/3 & -19/3 & 11/3 \\ -4/3 & 11/3 & -19/3 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_1} =$$

$$\text{Ker}(V - 12I_3) \Rightarrow \begin{cases} -4x - 4y - 4z = 0 \\ -4x - 19y - 11z = 0 \\ -4x + 11y - 19z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -30y + 30z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -2y \end{cases}$$

$$E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \|E_{\lambda_1}\| = \sqrt{6} \quad u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Ker}(V - 8I_3)}$$

$$V - 8I_3 = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & -4/3 \\ -4/3 & -7/3 & 11/3 \\ -4/3 & 11/3 & -7/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(V - 8I_3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8x - 4y - 4z = 0 \\ -4x - 7y + 11z = 0 \\ -4x + 11y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -18y + 18z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z \end{cases}$$

$$E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|E_{\lambda_2}\| = \sqrt{3} \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⑥ Déterminer les 2 premières composantes principales

$$C^{(1)} = y u^{(1)}$$

Calced

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -5 & 4+3+5/\sqrt{6} & & \\ -2 & 2 & 0 & -4-2/\sqrt{6} & & \\ 0 & 4 & 2 & -4-2/\sqrt{6} & & \\ 4 & 0 & 2 & 8-2/\sqrt{6} & & \\ 2 & -2 & 0 & 4+2/\sqrt{6} & & \\ -6 & -1 & 1 & -12+1-1/\sqrt{6} & & \end{array} \right)$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = y_{\mu}^{(2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calced

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -5 & -\frac{6}{3}\sqrt{3} & & \\ -2 & 2 & 0 & 0 & & \\ 0 & 4 & 2 & \frac{6}{3}\sqrt{3} & & \\ 4 & 0 & 2 & \frac{6}{3}\sqrt{3} & & \\ 2 & -2 & 0 & \frac{6}{3}\sqrt{3} & & \\ -6 & -1 & 1 & -\frac{6}{3}\sqrt{3} & & \end{array} \right)$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

⑦ Calculer les coefficients de corrélation linéaire des variables initiales avec les 2 premières composantes principales

$$\rho(X^{(i)}, C^{(i)}) = \frac{\text{cov}(X^{(i)}, C^{(i)})}{\sigma_{X^{(i)}} \sigma_{C^{(i)}}}$$

rappel $\sigma_{X^{(i)}} = \sqrt{V(X^{(i)})}$

$$\begin{aligned} \sigma_{C^{(i)}} &= \sqrt{\langle C^{(i)}, C^{(i)} \rangle} = \sqrt{C^{(i)T} D C^{(i)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} C^{(i)T} C^{(i)}} \end{aligned}$$

$$\text{cov}(X^{(i)}, C^{(i)}) = \langle Y^{(i)}, C^{(i)} \rangle$$

données centrées de $X^{(i)}$

étape 1 :

$$\sigma_{X^{(1)}} \quad \sigma_{X^{(2)}} \quad \sigma_{X^{(3)}}$$

rappel :

$$V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 64 & -8 & -8 \\ -8 & 34 & 22 \\ -8 & 22 & 34 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{X^{(1)}} = \sqrt{\frac{64}{6}} = \frac{8}{6}\sqrt{6} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

$$\sigma_{X^{(2)}} = \sigma_{X^{(3)}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$$

etape 2: calcul de

$$\sigma_{C^{(1)}} \quad \sigma_{C^{(2)}}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{C^{(1)}} &= \sqrt{\frac{1}{6} \times (24 + 6 + 6 + 6 + 6 + 24)} \\ &= \sqrt{\frac{72}{6}} = \sqrt{12} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{C^{(2)}} &= \sqrt{\frac{1}{6} \times (12 + 12 + 12 + 12)} \\ &= \sqrt{\frac{48}{6}} = \sqrt{8} = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

rappel

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

calcul de

① $\text{Cov}(X^{(1)}, C^{(1)})$	④ $\text{Cov}(X^{(1)}, C^{(2)})$
② $\text{Cov}(X^{(2)}, C^{(1)})$	⑤ $\text{Cov}(X^{(2)}, C^{(2)})$
③ $\text{Cov}(X^{(3)}, C^{(1)})$	⑥ $\text{Cov}(X^{(3)}, C^{(2)})$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$Y^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \langle Y^{(1)}, C^{(1)} \rangle = \frac{1}{6} (4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 12\sqrt{6})$$

$$= 4\sqrt{6}$$

$$\textcircled{2} \langle Y^{(2)}, C^{(1)} \rangle = \frac{1}{6} (6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6})$$

$$= 0$$

$$\textcircled{3} \langle Y^{(3)}, C^{(1)} \rangle = \frac{1}{6} (-10\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6})$$

$$= -2\sqrt{6}$$

$$\textcircled{4} \langle Y^{(1)}, C^{(2)} \rangle = \frac{1}{6} (-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3})$$

$$= \frac{16}{6}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$$\textcircled{5} \langle Y^{(2)}, C^{(2)} \rangle = \frac{1}{6} (6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{6} \langle Y^{(3)}, C^{(2)} \rangle = \frac{1}{6} (10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

données: $\sigma_{X^{(1)}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$ $\sigma_{X^{(2)}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$

$\sigma_{C^{(1)}} = 4\sqrt{3}$ $\sigma_{C^{(2)}} = 4\sqrt{2}$

$\sigma_{X^{(3)}} =$

$\text{cov}(1, 1) = 4\sqrt{6}$

$\text{cov}(1, 2) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$\text{cov}(2, 1) = 0$

$\text{cov}(2, 2) = 2\sqrt{3}$

$\text{cov}(3, 1) = -2\sqrt{6}$

$\text{cov}(3, 2) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$
$\chi^{(1)}$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	
$\chi^{(2)}$		
$\chi^{(3)}$		

etc...