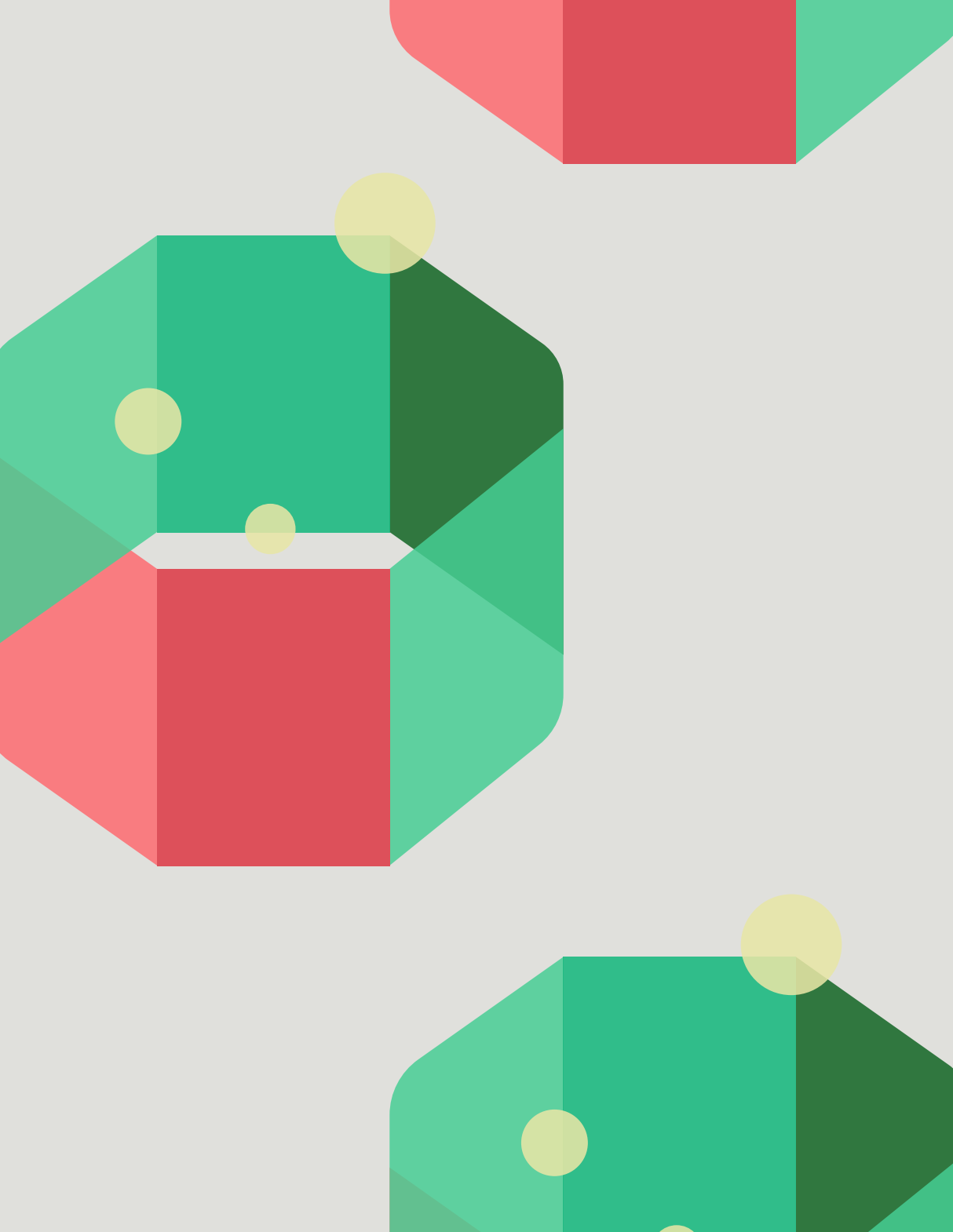




ASE3

12/05/21

COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES ET ANALYSE DE DONNÉES

I) Couple de variables aléatoires discrètes.

Soient X et Y deux V.A. réelles discrètes

On appelle couple (X, Y) l'application de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

X et Y sont défini sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$

$$(X, Y)(\Omega) = \left\{ (x_i, y_j) / (i, j) \in I \times J \right\}$$

univers Tribu Proba

1) Loi d'un couple

Def: On appelle loi de (X, Y) l'ensemble des couples $((x_i, y_j), P_{ij})$ où

$x_i \in X(\Omega)$ l'ensemble de valeurs de X

$y_j \in Y(\Omega)$ " " " Y

$$P_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Loi conjointe

$$P_{ij} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} P_{ij} = 1$$

Si $I = \llbracket 1, r \rrbracket$ et $J = \llbracket 1, s \rrbracket$

les P_{ij} sont souvent donnés ds le tableau à double entrée

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_s
x_1	$P_{1,1}$	—	$P_{1,j}$	—	$P_{1,s}$
$\vdots$					
x_i	$P_{i,1}$	—	$P_{i,j}$	—	$P_{i,s}$
$\vdots$					
x_r	$P_{r,1}$	—	$P_{r,j}$	—	$P_{r,s}$

$$P_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

2) Lois marginales

Def: Les var X et Y sont appelé variables marginales du couple (X, Y)

la loi de X (respectivement de Y) est appelé loi marginale de X . (respectivement de Y)

$$\text{Notation: } \forall i \in I \quad P_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} P_{ij}$$

$$\forall j \in J \quad P_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} P_{ij}$$

Exemple: La loi conjointe de (X, Y) est donnée par le tableau

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$ ← Loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
Loi de Y → $P_{\cdot j}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	1

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ valeurs de X

$Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ valeurs de Y

$$P((X=1) \cap (Y=2)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X=3) \cap (Y=3)) = \frac{3}{16}$$

Def: 2 v.A X et Y sont indépendantes ssi

$$P((X=x_i) \cap (Y=y_j)) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$$

$$\Leftrightarrow P_{ij} = P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j}$$

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini sur l'ensemble des valeurs prises par (X, Y)

Soit $Z = g(X, Y)$

$$Z_k = g(x_i, y_j)$$

$$(Z = z_k) = \bigcup_{(i,j)} ((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

$$z_k = g(x_i, y_j)$$

$$P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j) \\ z_k = g(x_i, y_j)}} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

Cas particuliers:

① $Z = X + Y = g(X, Y)$

$$P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j) \\ x_i + y_j = z_k}} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

② Si $Z = X \cdot Y = g(X, Y)$

$$P(Z = z_k) = \sum_{\substack{(i,j) \\ z_k = x_i y_j}} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

Exemple: $Z = X + Y$

loi du couple (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Exemple: $Z = X + Y$

Loi du couple (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

→ Déterminer la loi de

$$Z = X + Y$$

$$Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Z_k	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z=Z_k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

$$P(Z=5) = P(X+Y=5) = P((X=1) \cap (Y=4)) + P((X=2) \cap (Y=3)) \\ + P((X=4) \cap (Y=1)) + P((X=3) \cap (Y=2))$$

→ Déterminer la loi de $Z = X \cdot Y$

$$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(Z=Z_k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

$$\Rightarrow P(Z=4) = P((X=1) \cap (Y=4)) \\ + P((X=2) \cap (Y=2)) + P((X=4) \cap (Y=1)) \\ = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + 0 = \frac{3}{16}$$

3) Lois conditionnelles

Def: Soit X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{C}, P)$

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$$

Soit A un événement $P(A) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant A

$$P(X=x_i) = \frac{P((X=x_i) \cap A)}{P(A)}$$

Si Y est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{C}, P)$

$$P_{(Y=y_j)}(X=x_i) = \frac{P((X=x_i) \cap (Y=y_j))}{P(Y=y_j)}$$

$$P_{(Y=y_j)}(X=x_i) = \frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$

$$P_{(Y=3)}(X=1) = \frac{P((X=1) \cap (Y=3))}{P(Y=3)} = \frac{1/16}{5/16} = \frac{1}{5}$$

Esperance d'une fonction de deux V.A. discrètes.

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_i\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_j\}$$

$$Z = g(X, Y) \quad g \text{ fonction quelconque}$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s g(x_i, y_j) P(X=x_i \cap Y=y_j)$$

Rappel: (cas d'une suite variable)

$$E(g(X)) = \sum_k g(x_k) P(X=x_k)$$

Exemple: $g(X, Y) = X \cdot Y$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_j P_{i,j}$$

Prop: Si X et Y sont indépendantes alors :

$$E(X \cdot Y) = E(X) E(Y)$$

Demo:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i y_j P_{i,j}$$

or X et Y sont indépendantes $P_{i,j} = P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j}$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i y_j P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r x_i P_{i \cdot} \left(\sum_{j=1}^s y_j P_{\cdot j} \right) = E(X) E(Y)$$

Remarque: La réciproque est fautive.

Contre-exemples:

(X, Y) couple de loi conjointe

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{4}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{12}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(XY) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 i \cdot j P_{i,j}$$

$$E(XY) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^1 i P_{i \cdot} = \frac{7}{10}$$

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$E(XY) = E(X) E(Y) = \frac{7}{12}$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$P(X=0 \cap Y=2) = 0$$

$$P(X=0) \cdot P(Y=2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20} \neq 0$$

4) Covariance et coefficient de corrélation linéaires

Def: X et Y deux v.a. discrètes.

On appelle covariance de (X, Y) :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Propriété: $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Démo:

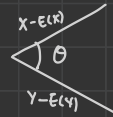
$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(Y)E(X)\end{aligned}$$

Remarque: Si X et Y sont indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Def: On appelle coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)}, \quad \sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\langle X - E(X), Y - E(Y) \rangle}{\|X - E(X)\| \cdot \|Y - E(Y)\|} = \cos(\theta)$$



• $\rho(X, Y) \leq 1$

si $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ pas de corrélation

ASE3

19/05/21

TD 1:

Ex1: X et Y deux V.A. tq $Y = X^2$

La loi de X est donnée

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

- 1) Déterminer la loi du couple (X, Y)
- 2) Déterminer la loi de Y
- 3) Indépendance
- 4) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$

①	X \ Y	0	1	4	Loi de X
	-2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Loi de Y		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$$

$$\begin{cases} P((X=i) \cap (Y=j)) = 0 & \text{si } i^2 \neq j \\ P((X=i) \cap (Y=i^2)) = P(X=i) \end{cases}$$

$$\text{Car } (X=i) \subset (Y=i^2) \Rightarrow A \cap B = A$$

$$A \subset B$$

- ② D'après le tableau, la loi marginale de Y est donnée par

$$P(Y=0) = \frac{1}{6}, \quad P(Y=1) = \frac{1}{2}; \quad P(Y=4) = \frac{1}{3}$$

- ③ Indépendance?

$$P((X=i) \cap (Y=j)) = P(X=i) \cdot P(Y=j) ?$$

$$\text{or } P((X=0) \cap (Y=1)) = 0 \neq P(X=0) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$\rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes.

- ④ $\text{Cov}(X, Y)$?

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j P((X=x_i) \cap (Y=y_j)) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_i P_{ij} \end{aligned}$$

On fait la mult $i \times j$ (voir tableau)

$$E(XY) = -8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{6} = 0$$

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = -\frac{2}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 - 0 \times E(Y) = 0$$

↖ inutile de calculer E(Y)

Ex 2: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

X et Y 2 v.A à valeurs des $\mathbb{N}$

$$\text{tq } P((X=k) \cap (Y=j)) = \frac{a}{j! 2^{k+1}}$$

1) Déterminer a

2) X et Y sont elles indépendantes?

3) $\text{Cov}(X, Y)$

$$\textcircled{1} \sum_{k,j=0}^{+\infty} P_{k,j} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{j! 2^{k+1}} = 1$$

$$\Rightarrow a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right) = 1$$

$$\Rightarrow a e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$$

Rappel: $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x=1 \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$

Rappel: (Série geom)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1, \text{ série geom de raison } x.$$

$$\Rightarrow a e \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1$$

$$\Rightarrow a e \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 1/2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow a e = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{e}}$$

② Loi marginale de X

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$P(X=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{k,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{k+1} (j!)}$$

$$P(X=k) = \frac{1}{e} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{e} \frac{1}{2^{k+1}} \cancel{e} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

Loi marginale de Y:

$$\forall j \in \mathbb{N}$$

$$P(Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{k+1} (j!)^k} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{j!} \times \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{j!} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1/2}$$

$$P(Y=j) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{j!} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$P(X=k) \cdot P(Y=j) = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{e} \times \frac{1}{j!} = P((X=k) \cap (Y=j))$$

$\Rightarrow X$ et Y sont indépendantes

③ Indépendantes $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

Ex 3: n boîtes numérotées de 1 à n

La boîte $n^{\circ} k$ contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une boîte

X v.a : numéro de la boîte

Y v.a : _____ boule

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y)

2) Calculer $P(X=Y)$

3) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$P((X=i) \cap (Y=j)) = 0 \text{ si } j > i$$

$$j \leq i \rightarrow P((X=i) \cap (Y=j)) = P(Y=j | X=i) P(X=i)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

$$P((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{i \cdot n}$$

$$2) (X=Y) = \bigcup_{i=1}^n ((X=i) \cap (Y=i))$$

$\uparrow$
événement
incompatible

$$P(X=Y) = \sum_{i=1}^n P((X=i) \cap (Y=i))$$

$$P(X=Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

③ Loi de Y

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^n P((X=i) \cap (Y=j))$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=j}^n \frac{1}{in} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n j P(Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^n j \sum_{i=j}^n \frac{1}{ni}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(\sum_{j=1}^i j \right) \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^i j = \frac{j(j+1)}{2} \quad \text{série arithmétique}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1)$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) = \frac{n+3}{4}$$

ASE3

26/05/21

Exo 4:

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. Les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule; Chaque boule ayant la même proba d'être tirée. On note sa couleur et on la remet ds l'urne avec c boules de la même couleur. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirage ($n \geq 2$). Soit X la V.A $\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p \wedge n} X_i$$

1) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)

En déduire la loi de X_2

2) Déterminer la loi de Z_2

3) a) Déterminer $Z_p(n)$

b) Soit $p \leq n-1$, Déterminer $P(X_{p+1}=1) \quad \forall k \in Z_p(n)$

$$\text{et mq } P(X_{p+1}=1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$$

4) Mq $\forall p \in \mathbb{Z}^+; n\mathbb{Z}$, $P(X_p=1) = \frac{1}{2} = P(X_p=0)$

1) On connaît la loi de X_1 , X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$

Cas 1 ($j \neq i$):

$$P((X_1=i) \cap (X_2=j)) = P(X_2=j / X_1=i) P(X_1=i) = \frac{1}{2+c} \times \frac{1}{2}$$

$$X_1(\Omega) = \mathbb{Z} 0, 1\mathbb{Z}$$

$$X_2(\Omega) = \mathbb{Z} 0, 1\mathbb{Z}$$

Cas 2: ($i=j$):

$$P((X_1=i) \cap (X_2=i)) = P(X_2=i / X_1=i) P(X_1=i) = \left(\frac{1+c}{2+c} \right) \times \frac{1}{2}$$

$X_1 \backslash X_2$	0	1	Loi X_1
0	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$\frac{1}{2(2+c)}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2(2+c)}$	$\frac{1+c}{2(2+c)}$	$\frac{1}{2}$
Loi X_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $Z_2 = X_1 + X_2$ $Z_2(\Omega) = \{0, 2\}$

$$P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{1+c}{2(1+c)}$$

$$P(Z_2 = 1) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \frac{1+c}{2+c}$$

$$P(Z_2 = 2) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1+c}{2(2+c)}$$

3) a) $Z_p = \sum X_i$

$$Z_p(\Omega) = \{0, 2\}$$

b) $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) \quad \forall k \in Z_p(\Omega)$ sachant que $(Z_p = k)$ est réalisé:

k boules blanches ont été tirées au cours des p précédents tirages (donc on a remis k c boules blanches) et $(p-k)$ boules noires ont été tirées (donc on a remis $(p-k)c$ boules noires).
Donc au total l'urne contient $2+kc + (p-k)c = 2+pc$

$$P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+kc}{2+pc}$$

$$X_{p+1} = 1 = \bigcup_{k=0}^p ((X_{p+1} = 1) \cap (Z_p = k))$$

$$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^p P((X_{p+1} = 1) \cap (Z_p = k))$$

$$= \sum P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) P(Z_p = k)$$

$$= \sum \left(\frac{1+kc}{2+pc} \right) P(Z_p = k)$$

$$= \frac{1}{2+pc} \left(\sum P(Z_p = k) + c \sum k P(Z_p = k) \right) = \frac{1}{2+pc} (1 + cE(Z_p))$$

4) $\forall p \in \{1, n\}$ $P(X_p = 1) = \frac{1}{2} = P(X_p = 0)$

montrons ce résultat par récurrence sur p :

Soit $A(p)$ la prop $P(X_p = 1) = \frac{1}{2}$

$A(1), A(2)$ vraies (1^{re} question)

Hyp: supposons que $R(1), A(2), \dots, R(p)$ vraies

$$P(Y_{p+1}) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc} \quad \text{OR} \quad E(Z_p) = E\left(\sum_{i=1}^p X_i\right) = \sum E(X_i) = \sum \frac{1}{2} \quad \text{car } X_i \hookrightarrow B\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$E(Z_p) = \frac{p}{2}$$

$$P(Y_{p+1}) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc} = \frac{1+c \frac{p}{2}}{2+pc} = \frac{1}{2}$$

Exo 5 :

X et Y 2 v.a. indépendantes suivent la mme loi de Bernoulli

$B(p)$ ($p \in]0,1[$)

On pose $U = X + Y$, $V = X - Y$

1) Quelle est la loi conjointe de (U, V) ?

2) Calculer $\text{Cov}(U, V)$

3) U et V indépendantes?

1) $\mathcal{M}(U) =]0, 2]$, $\mathcal{V}(V) =]-1, 1]$

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{U+V}{2} \\ Y = \frac{U-V}{2} \end{cases}$$

$u \backslash v$	-1	0	1	loi de U
0	0	q^2	0	q^2
1	qp	0	pq	$2pq$
2	0	p^2	0	p^2
loi de V	qp	q^2	pq	1

$$P((U=i) \cap (V=j))$$

$$= P(X = \frac{i+j}{2} \cap Y = \frac{i-j}{2}) = P(X = \frac{i+j}{2}) P(Y = \frac{i-j}{2})$$

car X et Y sont indep.

2) Rappel: la covariance est une forme bilinéaire symétrique et définie positive

(car c'est un produit scalaire sur l'espace des v.a.)

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X+Y, X-Y)$$

$$= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y)$$

$$= 0 \text{ (sym.)}$$

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y)$$

$$\text{or } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, X) = E(X^2) - E^2(X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Donc } \text{Cov}(U, V) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0 - 0 = 0$$

3) Indép?

$$P((U=0) \cap (V=-1)) = 0 \neq P(U=0)P(V=-1) = q^3p$$

$\rightarrow$ pas indep.

ASE3

02/05/21

Exo 6:

$N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ Poisson

X_1 v.a. le nb de client qui choisissent la caisse n°1

1) loi conditionnelle $P(X_1 = k / N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\forall 0 \leq k \leq n$ (m nb de caisse)

$$X_1 / N=n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad ; \quad p = \frac{1}{m}$$

2) Loi marginale de X_1

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_1 = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_1 = k / N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!} \quad \text{rappel: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \boxed{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} \end{aligned}$$

Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p) = \boxed{\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{m}\right)}$, Poisson

Exo 7:

$a \in]0, 1[$ et $b \in]0, +\infty[$

X et Y 2 v.a dont la loi conjointe est donnée.

$$\begin{cases} P_{i,j} = P(X=i \cap Y=j) = \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j! (i-j)!} & \text{si } i \geq j \\ P_{i,j} = 0 & \text{si } i < j \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

1) Déterminer les loi marginales, ainsi que $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$

2) X et Y indépendantes?

3) Déterminer la loi de $Z = X - Y$

4) Y et Z sont elles indépendantes?

1) Loi de X :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i \cap Y=j) = \sum_{j=0}^i \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j! (i-j)!}$$

$$\begin{aligned} P(X=i) &= b^i e^{-b} \sum_{j=0}^i \frac{a^j (1-a)^{i-j}}{j! (i-j)!} \\ &= \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j! (i-j)!} a^j (1-a)^{i-j} \\ &= \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \stackrel{\text{Newton}}{=} \frac{b^i e^{-b}}{i!} (a+1-a)^i = \boxed{\frac{b^i e^{-b}}{i!}} \end{aligned}$$

• Donc $X_1 \rightarrow \mathcal{P}(b)$

• $E(X) = V(X) = b$

Loi de Y :

$$\forall j \in \mathbb{N}, P(Y=j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j! (i-j)!} = \frac{e^{-b} a^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{b^i (1-a)^{i-j}}{(i-j)!}$$

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \frac{e^{-b} (ab)^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(b(1-a))^{i-j}}{(i-j)!} \\ &= \frac{e^{-b} (ab)^j}{j!} e^{b(1-a)} \\ &= \boxed{\frac{(ab)^j}{j!} e^{-ab}} \end{aligned}$$

• Y suit $\rightarrow \mathcal{P}(ab)$

• $E(X) = V(X) = ab$

2) Indépendance des états - arrivées des passes

$$\left. \begin{aligned} P(X=0) \cap (Y=1) &= 0 \\ P(X=0)(Y=1) &= e^{-b} e^{-ab} ab \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

3) $Z = X - Y = g(X, Y)$

$$Z(\Omega) = \mathbb{N} \quad (\text{car } X \geq Y)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Z=k) = \sum_{\substack{(i,j) \\ i-j=k}} P(X=i) \cap (Y=j) = \sum_{i \geq k} P(X=i) \cap (Y=i-k) \quad \text{avec } j = i - k$$

$$P(Z=k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b} a^{i-k} (1-a)^k}{(i-k)! k!}$$

$$= \frac{e^{-b} (1-a)^k}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{b^i a^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$= \frac{e^{-b} (1-a)^k}{k!} b^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(ba)^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$= \frac{e^{-b} (1-a)^k}{k!} b^k e^{ab}$$

$$= \frac{(b(1-a))^k}{k!} e^{-b(1-a)}$$

Donc $Z \sim P(b(1-a))$

4) Indépendance Y et Z ?

$$\begin{aligned} P(Y=j) \cap (Z=k) &= P(Y=j) \cap (X=\overbrace{j+k}^i) \\ &= \frac{b^{j+k} e^{-b} a^j (1-a)^k}{j! k!} \end{aligned}$$

$$P(Y=j) P(Z=k) = e^{-ab} \frac{(ab)^j}{j!} e^{-b(1-a)} \frac{(b(1-a))^k}{k!} = \frac{e^{-b} b^{j+k} a^j}{j! k!} (1-a)^k = P(Y=j) \cap (Z=k)$$

$\Rightarrow Y$ et Z sont indépendantes

II) Analyse en Composantes principales

1) Données et leurs caractéristiques

a) tableau des données

les observations de p variables sur n individus sont regroupées sur une matrice X à n lignes et p colonnes.

$$X = \begin{pmatrix} x_{(1)} & x_{(2)} & \dots & x_{(j)} & \dots & x_{(p)} \\ \dots & \dots & & x_{i(j)} & & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_{i(j)} \text{ est la valeur prise par la variable} \\ x_{(j)} \text{ sur le } i\text{-ème individu} \end{matrix}$$

$\xleftarrow{\quad p \quad} \rightarrow$

$$t_{e_i} = (x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(p)})$$

individu numero i

$$e_i = \begin{pmatrix} x_{i(1)} \\ x_{i(2)} \\ \vdots \\ x_{i(p)} \end{pmatrix}$$

$$X^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{1(j)} \\ x_{2(j)} \\ \vdots \\ x_{n(j)} \end{pmatrix}$$

b) Matrice des poids

On associe à chaque individu un poids $p_i \geq 0$ (proba de choisir l'individu i)

$$D = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & p_n \end{pmatrix} \text{ diagonale}$$

• $\sum p_i = 1$

• Si $p_i = \frac{1}{n} \forall i$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{n} I_n ; \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c) Centre de gravité

Le vecteur g des moyennes arithmétiques de chaque variable $x^{(j)}$ est défini par

$$t_g = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(p)})$$

où :

$$\bar{x}^{(j)} = \sum p_i x_{i(j)} \quad \text{moyenne de } x^{(j)}$$

• le tableau des données centrées est la matrice Y

$$y_{i(j)} = x_{i(j)} - \bar{x}^{(j)} \quad \forall j = 1 \dots p ; i = 1 \dots n$$

ASE3

16/06/21

$$X = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 8 & 12 & 10 \\ 12 & 16 & 14 \\ 20 & 8 & 14 \\ 16 & 4 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$P_i = \frac{1}{6} \quad \forall i$$

$$M = I_3 \quad (\text{métrique})$$

$$1) \quad \overline{X^{(1)}} = \frac{1}{6} \sum X_i^{(1)} = \frac{72}{6} = 12$$

cg = (12, 8, 10) centre de gravité

$$\overline{X^{(2)}} = \frac{1}{6} \sum X_i^{(2)} = \frac{48}{6} = 8$$

$$\overline{X^{(3)}} = \frac{1}{6} \sum X_i^{(3)} = \frac{60}{6} = 10$$

2) Matrice des données centrées Y

$$y_i^{(j)} = X_i^{(j)} - \overline{X^{(j)}}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ -12 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Matrice de Var-Cov

$$V = \frac{1}{n} Y^T Y \quad D = \frac{1}{6} I_3$$

$$V = \frac{1}{6} \frac{1}{6} Y^T Y = \begin{pmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{68}{3} & \frac{44}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} & \frac{68}{3} \end{pmatrix}$$

4) Diagonalisation de MV (M = I₃)

$$MV = V$$

$$P_V(\lambda) = \det(V - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} \frac{128}{3} - \lambda & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{68}{3} - \lambda & \frac{44}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} & \frac{68}{3} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$p_V(\lambda) = \begin{vmatrix} 32-\lambda & -16/3 & -16/3 \\ 32-\lambda & 68/3-\lambda & 44/3 \\ 32-\lambda & 44/3 & 68/3-\lambda \end{vmatrix} = (32-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -16/3 & -16/3 \\ 1 & 68/3-\lambda & 44/3 \\ 1 & 44/3 & 68/3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$p_V(\lambda) = (32-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -16/3 & -16/3 \\ 0 & 28-\lambda & 20 \\ 0 & 20 & 28-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p_V(\lambda) = (32-\lambda)((28-\lambda)^2 - 20^2) = (32-\lambda)(28-\lambda-20)(28-\lambda+20) \\ = (32-\lambda)(8-\lambda)(48-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 48 > \lambda_2 = 32 > \lambda_3 = 8 \rightarrow \text{valeurs propres de } V$$

5) Le % d'inertie

$$\bullet \text{ Le 1}^{\text{er}} \text{ axe : } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{48}{88} = 54\%$$

$$\bullet \text{ Le 2}^{\text{eme}} \text{ axe : } \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{32}{88} = 36\%$$

$$\bullet \text{ Le 3}^{\text{eme}} \text{ axe : } \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{8}{88} = 9\%$$

L' inertie portée par le plan principal :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{80}{88} = 90\%$$

6) Facteurs principaux

les facteurs principaux sont les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres

$$E_{48} = \text{Ker}(V - 48I_3)$$

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{48} \Leftrightarrow (V - 48I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16}{3}x - \frac{16}{3}y - \frac{16}{3}z = 0 \\ -\frac{16}{3}x - \frac{72}{3}y + \frac{44}{3}z = 0 \\ -\frac{16}{3}x + \frac{44}{3}y - \frac{76}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ -16x - 76y + 44z = 0 & (2) \\ -16x + 44y - 76z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -120y + 120z = 0 \Rightarrow y = z$$

$$(1) \Rightarrow x = -2y$$

$$E_{48} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ Droite vectorielle}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ normé}$$

Rappel:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{68}{3} & \frac{44}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{44}{3} & \frac{68}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_{32} = \text{Ker}(V - 32I_3)$$

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{32} \Leftrightarrow (V - 32I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32x - 16y - 16z = 0 \\ -16x - 28y + 44z = 0 \\ -16x + 44y - 28z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 & (1) \\ -4x - 7y + 11z = 0 & (2) \\ -4x + 11y - 7z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -18y + 18z = 0 \Rightarrow y = z$$

$$(1) \Rightarrow x = -y$$

$$E_{32} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow (u^{(1)}, u^{(2)})$ base orthonormée

7) Composantes principales

$$C^{(i)} = Y u^{(i)} \quad i = 1, 2$$

$$C^{(1)} = u^{(1)} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{projection du 1er individu sur le 1er axe} \\ \leftarrow \text{2eme individu} \dots \\ \vdots \end{matrix}$$

$$C^{(2)} = Y u^{(2)} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ 0 \\ 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

C_1 et C_2 contiennent les projections des individus sur les deux axes factoriels

(C_1 et C_2 sont centrés $\Sigma = 0$)

Calcul des coefficients de corrélation linéaire

$$\rho(X^{(1)}, C^{(1)}) = \frac{\text{Cov}(X^{(1)}, C^{(1)})}{\sigma_{X^{(1)}} \sigma_{C^{(1)}}}$$

$$\text{Cov}(X^{(1)}, C^{(1)}) = \langle Y^{(1)}, C^{(1)} \rangle$$

$\swarrow$ $\sigma_{X^{(1)}} \sigma_{C^{(1)}}$ $X^{(1)}$ centré

$$= \text{tr}(Y^{(1)} D C^{(1)}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} C^{(1)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ -12 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}(X^{(1)}, C^{(1)}) = \frac{1}{6} (16\sqrt{6} + 8\sqrt{6} + 16\sqrt{6} + 8\sqrt{6} + 48\sqrt{6})$$

$$= \frac{96\sqrt{6}}{6} = 16\sqrt{6}$$

$$\sigma_{C^{(1)}} = \|C^{(1)}\| = \sqrt{\langle C^{(1)}, C^{(1)} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{6} (96 + 4 \times 24 + 96)} = 4\sqrt{3}$$

$$\rho(X^{(1)}, C^{(1)}) = \frac{16\sqrt{6}}{4\sqrt{3} \sqrt{\frac{128}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma_{X^{(1)}} = \sqrt{\frac{128}{3}}$$

Tableau:

	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$
$X^{(1)}$	$\sqrt{3}/2 = 0,87$	$1/2 = 0,5$
$X^{(2)}$	$-\sqrt{3}/2 = -0,59$	$2\sqrt{3}/3 = 0,69$
$X^{(3)}$	$-0,59$	$0,69$

PARTIEL:

1^{er} exo : Couple, covariance etc
2^{ème} : ACP

Ex 2 :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ et le centre de gravité
- 2) Déterminer Y
- 3) Déterminer V
- 4) Diagonaliser V

- 5) Facteurs principaux ?
- 6) Composantes principales ?

1) $\bar{X}^{(1)} = 2$, $\bar{X}^{(2)} = 1$, $\bar{X}^{(3)} = 3$

$${}^t g = (2, 1, 3)$$

$$2) Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) V = {}^t Y D Y = {}^t Y \frac{1}{5} I_5 Y = \frac{1}{5} {}^t Y Y \\ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) P_{t_{YY}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow C_2 + C_3 \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_{t_{YY}}(\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2) \\ = (2-\lambda)(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2+\sqrt{2} \\ \gamma_2 = 2 \\ \gamma_3 = 2-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{5} \\ \lambda_2 = \frac{2}{5} \\ \lambda_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{5} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Valeurs propres} \\ \text{de } V \end{array}$$

$$\% \text{ d'inertie} : \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \boxed{90\%}$$

Rq: les matrices ${}^t Y Y$ et $V = \frac{1}{5} {}^t Y Y$ ont les mêmes vecteurs propres

$$E_{2+\sqrt{2}} = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow (u^{(1)}, u^{(2)})$ ^{base} orthonormée

$$E_2 = \text{Ker}({}^t Y Y - 2I_3) \\ = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6) C^{(1)} = Y u^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 - 1/2 \\ \sqrt{2}/2 + 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{(2)} = Y u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Componentes principales.